Das Lee-Modell in der expS-Theorie

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Peter Bodden
aus
Essen

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544719_0004

Das Lee-Modell in der expS-Theorie

Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Physik und Astronomie

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Peter Bodden

aus

Essen

Bochum 1981

Dissertation eingereicht am 29. 9. 1981
Tag der mündlichen Prüfung 4.11. 1981
Referent Prof. Dr. H. Kümmel
Korreferent Prof. Dr. D. Wagner

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
I.	Einleitung	3 - 7
II.	Das Lee-Modell und die expS-Theorie	
	1. Das Lee-Modell und die Renormierung im Sektor (1,1)	8 - 12
	2. Die expS-Theorie für den (2n, n)-Sektor des Lee-Modells	13 - 16
	3. Die ersten drei expS-Gleichungen	17 - 23
	4. Die V-N-Materie-Gleichungen mit renormierten Parametern	24 - 29
III.	Lösung der expS-Gleichungen in niedrigster Ordnung	
	1. Vorbemerkungen	3o - 31
	2. Die (1,o,1)-Gleichung	32 - 39
	3. Die Lösung der (1,o,1)-Gleichung	4o - 43
	4. Die (1,1)-Gleichung	44 - 5o
	5. Die Lösung der (1,1)-Gleichung	51 - 55
	6. Die Kopplung zwischen der (1,o,1)- und der (1,1)-Gleichung	56 - 61
	7. Die Gleichung für die Bindungsenergie	62 - 63
IV.	Numerische Behandlung	
	1. Vorbemerkungen	64 - 66
	2. Die numerische Lösung der R-Gleichung	67 - 72
	3. Die Einbeziehung der Zweiteilchen-Korrelationen	73 - 76
	4. Die Berechnung der Bindungsenergie	77

Seite

V. Ergebnisse der numerischen Rechnungen

1. Vorbemerkungen 78 - 79

2. Ergebnisse aus der "reinen" R-Gleichung 80 - 98

3. Effekte der Zweiteilchen-Korrelationen 99 - 118

VI. Zusammenfassung 119 - 122

Anhang A:

1. Bestimmung der Renormierungsfunktion 123 - 125

2. Bestimmung des Selbstenergieanteils 126 - 129

Anhang B:

1. Asymptotische Näherung für R 13o - 131

2. Konvergenzverhalten der R-Gleichung 132 - 135

3. Approximative Bestimmung des S_{11} - Terms 136 - 139

I. Einleitung

Die meisten der bisher durchgeführten Untersuchungen von Vielteilchensystemen gehen vom Begriff des Potentials, d.h., einer phänomenologischen Wechselwirkung zwischen zwei und mehr Teilchen aus. Wir wissen jedoch heute, daß diese Potentiale bestenfalls Näherungen für die Beschreibung von Elementarprozessen, d.h., den Austausch von Vektorbosonen ($\gamma, W^{\pm}, Z$) in der schwachen bzw. Mesonen (π, η, ρ, ω) in der starken Wechselwirkung sind.

Bereits im Jahre 1935 postulierte Yukawa /1/ die Existenz eines π-Mesons, welches für die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen verantwortlich sei. Dies führte in der Folgezeit auf der Grundlage solcher quantenfeldtheoretischer Oberlegungen zur Entwicklung von mesonentheoretisch gewonnenen Nukleon-Nukleon-Potentialen /2-5/. Diese Wechselwirkungen enthalten jedoch immer noch eine Anzahl von freien Parametern, die dann an Niederenergie-Streudaten sowie die Deuteron-Bindungsenergie angepaßt werden müssen /6-8/.

Hat man nun einmal den Austausch von Mesonen zur Grundlage der Beschreibung von stark wechselwirkenden Systemen gemacht, so sieht man sich gleich einem neuen Problem gegenüber: dem der Renormierung von Massen und Wechselwirkungen.

Da man ja in der Quantenfeldtheorie immer von unphysikalischen, sogenannten "nackten" Parametern wie Nukleon-, Mesonmassen und Nukleon-Meson-Vertex ausgeht, muß man die in den Rechnungen auftretenden

Terme zum Teil als sogenannte Selbstenergieanteile identifizieren, deren partielle Aufsummierung dann die nackten Größen in die physikalischen überführt. Dieses Programm ist jedoch nicht ohne Probleme: Selbst in den sogenannten renormierbaren Theorien sind die nackten Größen und die zugehörigen Renormierungsterme normalerweise unendlich. Ein möglicher Weg aus dem Dilemma ist z.B. die Einführung von Formfaktoren, deren anschauliche Bedeutung in der räumlichen Ausdehnung der Meson-Nukleon-Wechselwirkung zu sehen ist.

Die erste Lösung eines solchen Renormierungsproblems gelang in der Quantenelektrodynamik bei der Erklärung der elektromagnetischen Wechselwirkung durch den Austausch von Photonen (siehe z.B. /9/). So beeindruckend das Programm hier auch bewältigt wurde, so ist es doch bislang noch nicht gelungen, eine ähnlich konsistente Renormierung in einem realistischen Meson-Nukleon-System durchzuführen.

Die Tatsache, daß die mesonischen Einflüsse auf die Eigenschaften von Nukleon-Systemen im Laufe der letzten Jahre aber immer mehr an Interesse gewonnen haben (siehe z.B. /1o-14/), sollte jedoch zu Oberlegungen Anlaß geben, sich von realistischen Problemen zu lösen und die Renormierungstechniken erst einmal an lösbaren Modellen zu lernen.

Ein solches, im Einteilchen-Fall und in verschiedenen Zweiteilchen-Fällen lösbares Modell ist das Lee-Modell /15-17/. Es existiert in einer Vielzahl von Varianten, wie z.B. das statische /15/, das

quasi-relativistische /18/ oder das "Galilei"-Modell /19,2o/. All diesen ist die elementare Wechselwirkung $V \rightarrow N + \Theta$ zwischen zwei Fermionen V, N und einem Boson Θ gemeinsam.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das statische Modell auf die Einbeziehung von Rückstoßeffekten erweitert und dann für ein Vielteilchensystem untersucht werden. Schütte und da Providencia /21/ haben dies ebenfalls mit Hilfe eines Variationsverfahrens diskutiert. In dieser Arbeit soll nun die von Coester und Kümmel entwickelte expS-Theorie /22-27/ in einer ähnlich der von Sendler /28/ verwendeten Erweiterung zur Untersuchung des Lee-Modells im Vielteilchen-Sektor herangezogen werden. Dieses Verfahren besitzt den Vorteil, daß man bereits in niedrigster Ordnung sämtliche, aus den Renormierungsproblemen entstehenden Divergenzen beseitigen und zusätzlich einen einfachen Anteil der Vielteilcheneffekte mit berücksichtigen kann: die RPA, d.h., die Aufsummierung der Ring- oder "Bubble"-Diagramme. In allen höheren Gleichungen stellt sich das Renormierungsproblem dann wieder in der gleichen Weise, so daß sich unter Kenntnis der Einteilchen-Renormierung alle höheren Renormierungseffekte geschlossen aufsummieren lassen.

Die Korrelationseffekte dagegen lassen sich auch hier nicht ohne Näherungen berechnen. Eine der am schwierigsten zu beantwortenden Fragen ist nach wie vor die des richtigen Abschneidens der Störungsreihe. Hat man sich jedoch einmal auf ein bestimmtes Verfahren (hier das sogenannte S-Abschneide-Verfahren)

festgelegt, so lassen sich die aufgefundenen Gleichungen ohne größere Näherungen und vor allem ohne Vernachlässigung einzelner Diagramme einer Klasse lösen. Auffallend hierbei ist die klare Struktur und die teilweise analytische Lösbarkeit der erhaltenen Gleichungen.

Im folgenden sei nun kurz die Gliederung der vorliegenden Arbeit erläutert. Im zweiten Kapitel soll noch einmal kurz das Lee-Modell, seine "Sektoren", seine Renormierung im Einteilchen-Fall sowie die diesem Problem angepaßte Form der expS-Theorie dargestellt werden. Ebenso werden die expS-Gleichungen für dieses Problem abgeleitet und so umformuliert, daß sie nur noch renormierte, d.h., physikalische Parameter enthalten.

Diese Gleichungen werden dann im dritten Kapitel auf eine Form gebracht, in der sich die Ein-Fermion-Ein-Boson-Gleichung lösen und die Eindeutigkeit dieser Lösung beweisen läßt. Ebenso wird für die Zwei-Fermion-Gleichung eine analytische Lösung hergeleitet und deren Einfluß auf die Ein-Fermion-Ein-Boson-Gleichung diskutiert. Desweiteren wird hier die bereits angesprochene Trennung von Renormierungs- und Vielteilcheneffekten besprochen.

Die für die numerischen Rechnungen herangezogenen Verfahren werden dann in Kapitel IV dargestellt und deren Anwendung auf das vorliegende Problem erläutert. Die Ergebnisse dieser Rechnungen finden sich in Kapitel V gefolgt von einer abschließenden Diskussion im sechsten Kapitel.

Im Anhang A ist die Berechnung der wichtigsten Hilfsfunktionen aufgezeigt und im Anhang B befinden sich die Diskussionen des asymptotischen und des Konvergenzverhaltens der gelösten Gleichungen sowie die explizite Darstellung einer benutzten Näherung bei der Berechnung der Zweiteilchen-Effekte.

II. Das Lee-Modell und die expS-Theorie

1. Das Lee-Modell und die Renormierung im Sektor (1,1)

Man betrachte den Hamilton-Operator

$$H = T_V^0 + T_N + t + W_0 + W_0^+ \tag{1}$$

mit der kinetischen Energie der V-Teilchen

$$T_V^0 = \sum_\alpha \langle \alpha | T_V^0 | \alpha \rangle V_\alpha^+ V_\alpha \tag{2}$$

der N-Teilchen

$$T_N = \sum_\beta \langle \beta | T_N | \beta \rangle N_\beta^+ N_\beta \tag{3}$$

der Θ-Teilchen

$$t = \sum_k \langle k | t | k \rangle a_k^+ a_k$$

und der Wechselwirkung

$$W_0 = \sum_{\alpha\beta k} \langle \alpha | W_0 | \beta k \rangle V_\alpha^+ N_\beta a_k \tag{5}$$

Dieser Hamilton-Operator beschreibt den Prozeß

$$V \rightleftharpoons N + \Theta \tag{6}$$

Wobei V und N zwei nichtrelativistische Fermionen sind, die sich durch Emission bzw. Absorption eines skalaren, relativistischen Bosons Θ ineinander umwandeln können.

Die Vertexfunktion $\langle \alpha | W | \beta k \rangle$ bestimmt sich hier ähnlich wie in /28/ aus der Lagrange-Dichte der pseudoskalaren Theorie

$$L = ig \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi \Phi$$

In Gleichungen (2)-(5) sind V, N, a bzw. V^+, N^+, a^+ die entsprechenden Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren der V-, N- und Θ-Teilchen.

Die Bezeichnung der Zustände, die hier und im folgenden verwendet wird, ist aus nachstehendem Schema ersichtlich.

TEILCHENSORTE	$p < p_f$	$p > p_f$	p BELIEBIG
V	$\|\mu>$	$\|\pi>$	$\|\alpha>$
N	$\|\nu>$	$\|\rho>$	$\|\beta>$
Θ	—	—	$\|k>$

Tab.1

p_f ist der Fermi-Impuls.

Für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gelten folgende Kommutator- und Antikommutator-Regeln:

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}$$
$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0 \qquad (7)$$

$$[N_\beta, N_{\beta'}^+]_+ = \delta_{\beta\beta'} \qquad [V_\alpha, V_{\alpha'}^+]_+ = \delta_{\alpha\alpha'}$$
$$[N_\beta^+, N_{\beta'}^+]_+ = 0 \qquad [V_\alpha, V_{\alpha'}]_+ = 0$$

Die zu verschiedenen Teilchenarten gehörenden Operatoren kommutieren miteinander.

Die Besonderheit, die das Lee-Modell im Einteilchenfall exakt lösbar macht, ist die Existenz von zwei mit dem Hamilton-Operator (1) vertauschenden Operatoren:

$$Q_1 := \sum_\alpha V_\alpha^+ V_\alpha + \sum_\beta N_\beta^+ N_\beta \qquad (8.a)$$

$$Q_2 := \sum_\alpha V_\alpha^+ V_\alpha + \sum_k a_k^+ a_k \qquad (8.b)$$

Der Kommutator $[H, Q_1]$ spiegelt hierbei die Fermionenzahl-Erhaltung wieder, $[H, Q_2]$ weist dagegen auf die Ladungserhaltung des Systems hin. Mit den Eigenwerten (q_1, q_2) der Operatoren Q_1 und Q_2 läßt sich das Lee-Modell in verschiedene Sektoren aufteilen. So enthält z.B.

der Sektor (o,1) den Zustand $|\beta\rangle = N_\beta^+ |0\rangle$
der Sektor (o,1) den Zustand $|k\rangle = a_k^+ |0\rangle$
der Sektor (1,1) die Zustände $|\alpha\rangle = V_\alpha^+ |0\rangle$
und $|\beta k\rangle = N_\beta^+ a_k^+ |0\rangle$ usw.

Alle diese Zustände sind Eigenzustände von H mit Eigenwerten $t_\beta, \omega_k, t_\alpha, t_\beta + \omega_k$ usw.

An dieser Stelle ist zu bemerken, daß auf Grund der einfachen Struktur des Modells sowohl das N- als auch das Θ-Teilchen "nackte" Teilchen sind und nur das V-Teilchen "angezogen", d.h., renormiert werden muß (s. auch Abschnitt II.4).

Die Renormierungsbedingungen im (1,1)-Sektor ergeben sich aus der Schrödinger-Gleichung für das V-Teilchen (vgl. z.B. /18, 29/).

$$ {}_d\langle\alpha|H|\alpha\rangle_d = {}_d\langle\alpha|T_V|\alpha\rangle_d =: t_\alpha \qquad (9) $$

Wobei die "angezogenen" Zustände $|\alpha\rangle_d$ gegeben sind durch

$$ |\alpha\rangle_d = |\alpha\rangle + \sum_{\beta k} \frac{\langle \beta k | W_0^+ | \alpha \rangle}{t_\alpha - t_\beta - \omega_k} |\beta k\rangle \qquad (1o) $$

Hier sind die kinetischen Energien t_β, ω_k definiert als

$$ t_\beta := \langle\beta|T_N|\beta\rangle \qquad (11) $$

$$ \omega_k := \langle k|t|k\rangle \qquad (12) $$

t_α hingegen ist die renormierte Einteilchenenergie des V-Teilchens, welche als Lösung der Gleichung

$$t_\alpha = t^0_\alpha + \sum_{\beta k} \frac{\langle \alpha | W_0 | \beta k \rangle \langle \beta k | W_0^+ | \alpha \rangle}{t_\alpha - t_\beta - \omega_k} \qquad (13)$$

gegeben ist.

Hierbei ist

$$t^0_\alpha = \langle \alpha | T^0_V | \alpha \rangle \qquad (14)$$

Für jeden Satz von Quantenzahlen α existiert höchstens ein gebundener Zustand /3o/.

Die renormierten Vertex-Funktionen $\langle \alpha | W | \beta k \rangle$ bzw. $\langle \beta k | W^+ | \alpha \rangle$ sind gegeben als

$$\langle \alpha | W | \beta k \rangle = \langle \alpha | W_0 | \beta k \rangle / Z_\alpha \qquad (15)$$

bzw.

$$\langle \beta k | W^+ | \alpha \rangle = \langle \beta k | W_0^+ | \alpha \rangle / Z_\alpha \qquad (16)$$

Z_α^{-2} entspricht der Renomjerungskonstanten Z_2 des statischen Lee-Modells /15/, welches die Rückstoßeffekte unberücksichtigt läßt. Bei Berücksichtigung der Rückstoßeffekte, was im Falle von Mehrteilchensystem, d.h., höheren Sektoren des Modells unerläßlich ist, wird diese Konstante dann zu einer Funktion des V-Teilchen-Zustands/3o/, die sich durch die renormierte V-Teilchen-Energie bestimmt als

$$Z_\alpha^2 = \langle \alpha | \alpha \rangle = 1 + \sum_{\beta k} \frac{\langle \alpha | W_0 | \beta k \rangle \langle \beta k | W_0^+ | \alpha \rangle}{(t_\alpha - t_\beta - \omega_k)^2} \qquad (17)$$

Hierbei wurde von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die beiden Zustände des (1,1)-Sektors $|\alpha>$ und $|\beta k>$ orthogonal zueinander stehen. Will man nun Z_α vollständig durch renormierte Parameter ausdrücken, so ergibt sich nach einer einfachen algebraischen Umformung

$$Z_\alpha^{-2} = 1 - \sum_{\beta k} \frac{<\alpha|W|\beta k><\beta k|W^+|\alpha>}{(t_\alpha - t_\beta - \omega_k)^2} \quad . \qquad (18)$$

In diesem Sektor ist es möglich, das Modell ohne die Einführung von Formfaktoren zu lösen, jedoch ergeben sich einige Unstimmigkeiten mit der Annahme einer positiv definiten Metrik im Hilbertraum. So wird z.B. die Funktion Z_α dann negativ /3o, 31/. Um solche "Geisterzustände" auszuschließen, sei hier und im folgenden angenommen, daß die Matrixelemente $<\alpha|W|\beta k>$ und $<\beta k|W^+|\alpha>$ Formfaktoren enthalten, die sicherstellen, daß $Z_\alpha > 0$ ist, und konsequenterweise die Energie- und Vertexrenormierung endlich halten.

Auf Grund der einfachen Struktur des Lee-Modells ist hier der Begriff "Vertexrenomierung" etwas irreführend, da sich die Renormierungseffekte der Wechselwirkung auf die Einführung einer zustandsabhängigen, nicht renormierten Kopplungs-"konstanten" beschränken, die dann durch die Renormierung in eine endliche, zustandsunabhängige Konstante überführt wird. Da es sich sowohl bei dem Boson als auch bei dem N-Teilchen um "nackte" Teilchen handelt, können Effekte höherer Ordnung nicht auftreten. Dieser Punkt wird bei der Renormierung im Sektor (2n , n) für $n \to \infty$ noch ausführlicher besprochen werden.

2. Die expS-Theorie für den (2n,n)-Sektor des Lee-Modells

Um die von Coester und Kümmel entwickelte expS-Theorie /22-26/ auf das Lee-Modell anzuwenden, d.h., auf ein System, das nicht von phänomenologischen Potentialen ausgeht, ist eine Erweiterung der Theorie ähnlich wie bei Sendler /28/ nötig.

Betrachtet man den Hamilton-Operator (1) im Sektor (2n, n) für $n \longrightarrow \infty$ so wird aus dem Problem für die kinetische Energie T_α im Sektor (1,1) das Problem der Bindungsenergiebestimmung in einer (hypothetischen) N-V-Materie, deren nichtwechselwirkender Grundzustand sich als Slater-Determinante aus einer gleichen Anzahl von V- und N-Teilchen angeben läßt:

$$|\Phi\rangle = \prod_{\mu\nu} V^+_\mu N^+_\nu |0\rangle \tag{19}$$

Die Wellenfunktion des wechselwirkenden Systems sei nun ähnlich wie bei Sendler /28/ geschrieben als

$$|\psi\rangle = e^{(R+S)}|\Phi\rangle \tag{20}$$

Hierbei ist der Operator S der expS-Theorie also aufgespalten in einem Anteil mit (R) und einem Anteil ohne (S) äußere Bosonen. Berücksichtigt man die Erhaltungseigenschaften des Hamilton-Operators (1) bezüglich Fermionzahl (8.a) und Ladung (8.b), so lassen sich die Operatoren R und S angeben als

$$S := \sum_{i=1}^{N/2} \sum_{j=0}^{N/2} S_{ij} \tag{21}$$

$$R := \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{l=0}^{N/2} \sum_{m=1}^{K} R_{klm} \tag{22}$$

Die einzelnen Summenglieder sind demnach zu definieren als

$$S_{ij} = \frac{1}{i!^2\, j!^2} \sum_{\mu\nu\pi\rho} \langle \pi_1 \cdots \pi_i, \rho_1 \cdots \rho_j \,|\, S_{ij} \,|\, \mu_1 \cdots \mu_i, \nu_1 \cdots \nu_j \rangle_A$$
$$* V^+_{\pi_1} \cdots V^+_{\pi_i} N^+_{\rho_1} \cdots N^+_{\rho_j} N_{\nu_j} \cdots N_{\nu_1} V_{\mu_i} \cdots V_{\mu_1} \qquad (23)$$

sowie

$$R_{klm} = \frac{1}{k!^2\, l!^2} \sum_{\mu\nu\pi\rho k} \langle \pi_1 \cdots \pi_{k-m}, \rho_1 \cdots \rho_{l+m}, (k_1 \cdots k_m)_S \,|\, R_{klm} \,|\, \mu_1 \cdots \mu_k, \nu_1 \cdots \nu_l$$
$$* V^+_{\pi_1} \cdots V^+_{\pi_{k-m}} N^+_{\rho_1} \cdots N^+_{\rho_{l+m}} N_{\nu_l} \cdots N_{\nu_1} V_{\mu_k} \cdots V_{\mu_1} a^+_{k_1} \cdots a^+_{k_m} \qquad (24)$$

Der Index "A" an den R- bzw. S-Amplituden bedeutet Antisymmetrisierung bezüglich der V- und N-Teilchen-Zustände. Also z.B. $|\mu_1 \mu_2\rangle_A = |\mu_1 \mu_2\rangle - |\mu_2 \mu_1\rangle$.
Ähnlich bedeutet der Index "S" an den Boson-Zuständen Symmetrisierung bezüglich dieser. Also z.B.
$|k_1 k_2\rangle_S = |k_1 k_2\rangle + |k_2 k_1\rangle$.

Die Schrödinger-Gleichung des (2n,n)-Sektors läßt sich nun also schreiben als

$$\bar{e}^S \bar{e}^R H e^R e^S |\Phi\rangle = E |\Phi\rangle \qquad (25)$$

Durch Projektion dieser Gleichung auf die Zustände
$|\Phi\rangle$, $N^+_\rho V_\mu a^+_k |\Phi\rangle$, $N^+_\rho V^+_\pi V_\mu N_\nu |\Phi\rangle$
etc., d.h., also (wenn man die Slater-Determinante als "Vakuum" des Vielteilchen-Systems betrachtet), auf das Vakuum, den Einteilchen-Ein-Loch-Zustand, den Zwei-Teilchen-Zwei-Loch-Zustand usw., so erhält man eine Hierarchie von Gleichungen ähnlich den in /27,28/ hergeleiteten, nämlich

$$\langle \Phi | \bar{e}^S \bar{e}^R H e^R e^S |\Phi\rangle = E \qquad (26a)$$

$$\langle \Phi | V^+_\mu N_\rho a_k \bar{e}^S \bar{e}^R H e^R e^S |\Phi\rangle = 0 \qquad (26b)$$

$$\langle \Phi | V_{\mu}^{+} N_{\nu}^{+} N_{\rho} V_{\pi} e^{-S} \bar{e}^{R} H e^{R} e^{S} | \Phi \rangle = 0 \qquad (26c)$$

$$\vdots$$

$$\langle \Phi | V_{\mu_1}^{+} \cdots V_{\mu_k}^{+} N_{\nu_1}^{+} \cdots N_{\nu_l}^{+} N_{\rho_{l+m}} \cdots N_{\rho_1} V_{\pi_{k-m}} \cdots V_{\pi_1} a_{k_1} \cdots a_{k_m} \bar{e}^{S} \bar{e}^{R} H e^{R} e^{S} | \Phi \rangle = 0 \qquad (26d)$$

Entsprechend der Definition der R- und S-Operatoren werden nun diese Gleichungen mit "Energie-Gleichung" sowie (K,l,m)-Gleichung bzw. (i,j)-Gleichung für den Fall m = o bezeichnet. Wie sich später noch herausstellen wird, sind dies nämlich gerade die Bestimmungsgleichungen für die entsprechenden Amplituden. An dieser Stelle ist eine Bemerkung über die Darstellung der erhaltenen Ausdrücke in Diagrammform angebracht, da sich an Hand von Graphen auch die Renormierungseffekte wesentlich anschaulicher diskutieren lassen.

Um die drei Teilchensorten unterscheiden zu können, werden für V-Teilchen doppelte, für N-Teilchen einfache und für die Θ-Teilchen gestrichelte Linien verwandt. Für V- bzw. N-Teilchen mit $p < p_f$ (Löcher) laufen diese Linien abwärts, für Teilchen mit $p > p_f$ aufwärts. Die Bosonen erhalten keine Richtungsangabe, da sie nicht unter das Pauli-Prinzip fallen und somit immer "vorwärts" laufen. Ober innere Linien ist zu summieren. Es folgen einige Beispiele:

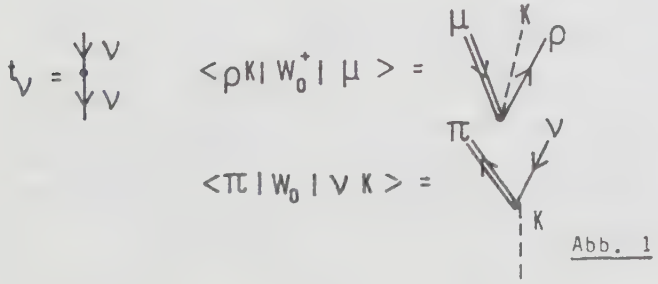
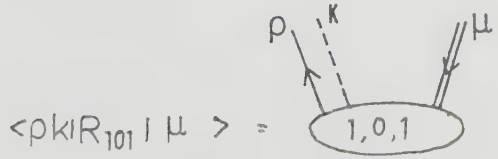
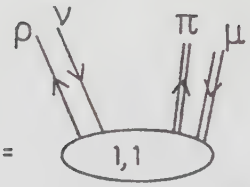


Abb. 1



$\langle \pi\rho | S_{11} | \mu\nu \rangle_A =$



Ebenfalls analog zu /27, 28/ läßt sich nun ein verallgemeinertes "Linked-Cluster-Theorem"herleiten. Unter Berücksichtigung der speziellen Symetrien des Lee-Modells sowie der Tatsache, daß die Slater-Determinante keine Bosonen enthält, läßt sich dies wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} &\bar{e}^S \; \bar{e}^R \; H \; e^R \; e^S \\ &= T_V + T_N + \{W_0 R\}_L + \{W_0 S R\}_L + \tfrac{1}{2!}\{W_0 S S R\}_L + \tfrac{1}{2!}\{W_0 R R\}_L \\ &+ \tfrac{1}{2!}\{W_0 S R R\}_L + \{W_0^+ R\}_L + \{W_0^+ S R\}_L + \tfrac{1}{2!}\{W^+ R R\}_L \\ &+ \tfrac{1}{3!}\{W_0 R R R\}_L + W_0^+ + \{W_0^+ S\}_L + \tfrac{1}{2!}\{W_0^+ S S\}_L \end{aligned} \tag{27}$$

Der Index " L " (für Linked) an den geschweiften Klammern bedeutet, daß nur solche Ausdrücke in den entsprechenden Gleichungen zu berücksichtigen sind, die verbundene Diagramme erzeugen. Also ist z.B.

$$\{W_0 \; S R\}_L = [[\, W_0 , S \,], R \,] \tag{28}$$

An Hand dieser Gleichung wird nun die explizite Form der ersten expS-Gleichungen (26) hergeleitet. Es soll hier genügen, die einfachste dieser Gleichungen, nämlich die Energie-Gleichung herzuleiten und die übrigen sowie ihre graphische Darstellung anzugeben.

3. Die ersten drei expS-Gleichungen

3.1 Die Energie-Gleichung

Aus der Definition der R- und S-Operatoren folgt sofort

$$S^+|\Phi\rangle = 0 = R^+|\Phi\rangle \tag{29}$$

und damit aus Gleichung (26a)

$$\begin{aligned} E &= \langle\Phi| e^{-S}\, e^{-R}\, H\, e^{R}\, e^{S} |\Phi\rangle \\ &= \langle\Phi| T_V^0 |\Phi\rangle + \langle\Phi| T_N |\Phi\rangle + \langle\Phi| W_0 R_{101} |\Phi\rangle \end{aligned} \tag{30}$$

Dabei wurde die Impuls- und Drehimpulserhaltung des Hamilton-Operators benutzt. Dann ist nämlich $S_{01} = S_{10} = 0$. Von allen Wechselwirkungsthermen bleibt nur der angegebene stehen, da alle Operatoren vollständig kontrahiert werden müssen. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \langle\Phi| W_0 R_{101} |\Phi\rangle &= \sum_{\alpha\beta K\, \mu\rho K'} \langle\alpha| W_0 |\beta K\rangle \langle\rho K'| R_{101} |\mu\rangle \\ &\quad \cdot \langle\Phi| V^+ N\, a\, N^+ a^+\, V |\Phi\rangle \\ &\qquad\qquad \alpha\ \beta\ K\ \rho\ K'\ \mu \\ &= \sum_{\mu\rho K} \langle\mu| W_0 |\rho K\rangle \langle\rho K| R_{101} |\mu\rangle . \end{aligned} \tag{31}$$

Nach Definition ist

$$\langle \nu k | R_{101} | \mu \rangle = 0 \tag{32}$$

Daher läßt sich die Energie-Gleichung angeben als

$$E = \sum_\nu \langle \nu | T_N | \nu \rangle + \sum_\mu \langle \mu | T_\nu^0 + W_0 R_{101} | \mu \rangle \qquad (33)$$

oder mit den Definitionen (9) und (11)

$$E = \sum_\mu t_\mu^0 + \sum_\nu t_\nu + \sum_\mu \langle \mu | W_0 R_{101} | \mu \rangle \qquad (34)$$

Mit den in Abschnitt 2 eingeführten Diagrammen läßt sich diese Gleichung darstellen als

Abb. II

3.2 Die (1,o,1)-Gleichung

Die unterste (und einfachste) Gleichung in der Hierarchie der R-Gleichungen ist die "Ein-Fermionen-Gleichung" für die in der Energie-Gleichung auftretende Funktion $\langle \rho\, k | R_{\dots} | \mu \rangle$ Um die Analogie zur mesonenfreien expS-Theorie aufrechtzuerhalten, werde hierbei und im weiteren von der "Einteilchen-Gleichung" gesprochen. Es sei jedoch kurz auf die Unterschiede zur mesonenfreien expS-Theorie eingegangen. Im Gegensatz zu dieser existieren hier zu jeder Ordnung in der Fermionenzahl mehrere Gleichungen, von denen jedoch einige trivialerweise erfüllt sind.

Der (trivialen) Gleichung für S_1 (vgl. /27/) entsprechen z.B. in dieser Theorie die Gleichungen für S_{1o}, S_{o1} und R_{1o1}. Letztere ist jedoch hier nicht trivial: Da das V-Teilchen Impuls und Drehimpuls an das Boson abgeben kann, ist diese Amplitude hier ungleich Null. Der S_2-Gleichung entsprächen hier die Gleichungen für S_{11}, S_{2o}, S_{o2}, R_{111}, R_{2o1}, R_{2o2} usw. Da - wie schon erwähnt - in dieser Arbeit nur die untersten Gleichungen der R- bzw. S-Hierarchie

gelöst werden und daher keine Verwechselung auftreten kann, sei im folgenden mit Ein-Teilchen-Gleichung die (1, o, 1)-Gleichung und mit Zwei-Teilchen-Gleichung die (1, 1)-Gleichung gemeint. D.h., die Anzahl der Fermionen bestimmt die Notation.

Leitet man nun die Ein-Teilchen-Gleichung nach dem oben besprochenen Verfahren her, so erhält man mit der Definition eines "nackten" Energienenners

$$e_1^0 := t_\mu^0 - t_\rho - \omega_k \tag{35}$$

folgende Gleichung aus (26b)

$$\begin{aligned} & e_1^0 \langle \rho\, k | R_{101} | \mu \rangle \\ & = \sum_{\mu' \rho' k'} \langle \mu' | W_0 | \rho'\, k' \rangle \langle \rho \rho' (k k')_S | R_{202} | \mu \mu' \rangle_A \\ & + \sum_{\mu' \rho' k'} \langle \mu' | W_0 | \rho'\, k' \rangle \big[\langle \rho\, k' | R_{101} | \mu \rangle \langle \rho'\, k | R_{101} | \mu' \rangle \\ & \qquad - \langle \rho\, k' | R_{101} | \mu' \rangle \langle \rho'\, k | R_{101} | \mu \rangle \\ & \qquad - \langle \rho'\, k' | R_{101} | \mu \rangle \langle \rho\, k | R_{101} | \mu' \rangle \big] \\ & + \langle \rho\, k | W_0^+ | \mu \rangle - \sum \langle \nu\, k\, \rho | W_0^+(1)\, S_{11} | \mu \nu \rangle_A \end{aligned} \tag{36}$$

$W_0^+(1)$ bedeutet hier, daß W_0^+ nur auf den ersten Teilzustand des Bra $\langle \nu\, k\, \rho |$, nämlich $\langle \nu\, k |$ wirkt. In Diagrammen läßt sich Gleichung (36) wie folgt darstellen:

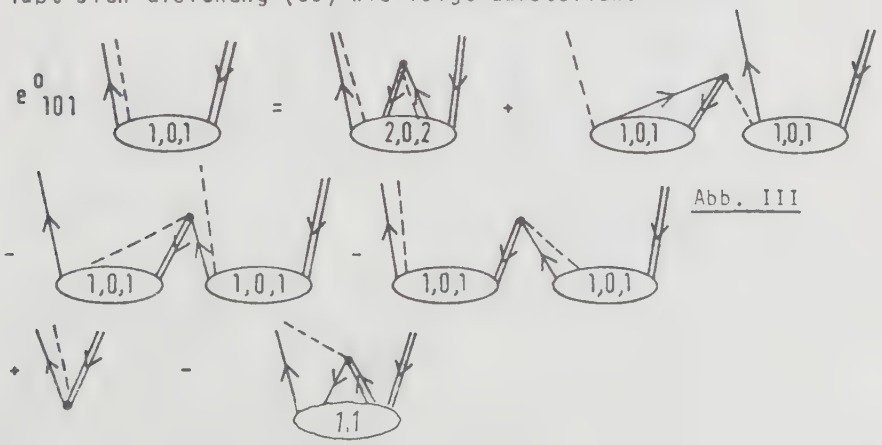


Abb. III

3.3 Die (1,1)-Gleichung

Die niedrigste Gleichung in der S-Hierarchie ist die Zweiteilchen-Gleichung für S_{11} aus (26c). Mit der Definition des (ebenfalls "nackten") Energienenners

$$e_2^0 := t_\mu^0 + t_\nu - t_\pi^0 - t_\rho \qquad (37)$$

läßt sich diese wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} e_2^0 <\pi\rho|S_{11}|\mu\nu> &= 2\sum_{\rho' k} <\pi|W_0|\rho' k><\rho'\rho k|R_{111}|\mu\nu>_A \\ &- \tfrac{1}{2}\sum_{\mu' k} <\mu'|W_0|\nu k><\pi\rho k|R_{201}|\mu\mu'>_A \\ &- \sum_k <\pi|W_0|\nu k><\rho k|R_{101}|\mu> \\ &+ \sum_{\mu'\rho' k} <\mu|W_0|\rho' k><\pi\rho'\rho k|R_{211}|\mu\mu'\nu>_A \\ &+ \sum_{\mu'\rho' k} <\mu|W_0|\rho' k> \; A_\mu A_\rho [<\pi\rho'|S_{11}|\mu'\nu>_A \\ &\qquad * <\rho k|R_{101}|\mu>]_{\mathcal{L}} \end{aligned} \qquad (38)$$

Die Operatoren A_μ und A_ρ bewirken hier Antisymmetriesierung der μ- und ρ-Zustände. Der Index $\mathcal{L}$ steht wie in Gleichung (27) für "linked".

Stellt man diese Gleichung durch die in Abschnitt 2 eingeführten Diagramme dar, so erhält man

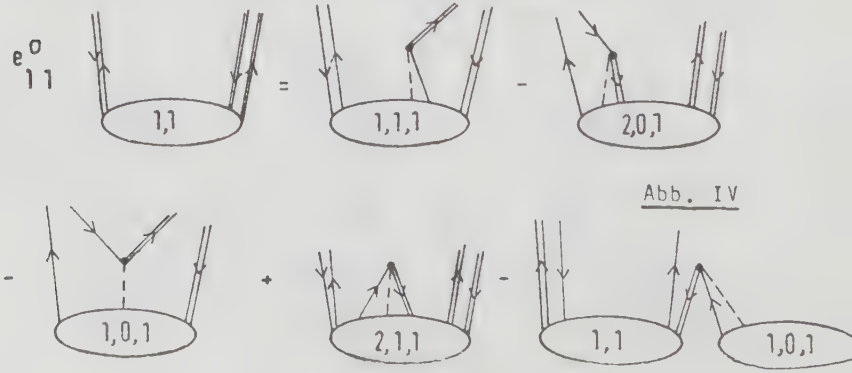


Abb. IV

3.4 Die (1,1,1)-Gleichung

Obwohl diese Gleichung nicht mehr zu denen gehört, die im Rahmen dieser Arbeit gelöst werden, ist es sinnvoll, diese noch anzugeben (insbesondere in Diagrammform), um die im nächsten Abschnitt zu besprechenden Renormierungseffekte besser verdeutlichen zu können.

Anlalog zu den beiden anderen hergeleiteten Gleichungen sei der "nackte" Energienenner hier definiert als

$$e_3^0 := t_\mu^+ t_\nu^- t_{\rho_1}^- t_{\rho_2}^- \omega_k \qquad (39)$$

Damit schreibt sich die (1,1,1)-Gleichung wie folgt:

$$e_3^0 \langle \rho_1 \rho_2 k | R_{111} | \mu\nu \rangle_A = -\frac{1}{2} \sum_{\mu' k'} \langle \mu' | W_0 | \nu k' \rangle \langle \rho_1 \rho_2 (k k')_S | R_{202} | \mu\mu' \rangle_A$$

$$-\frac{3}{2} \sum_{\mu' k' \rho'} \langle \mu' | W_0 | \rho' k' \rangle \langle \rho' \rho_1 \rho_2 (k k')_S^{\mathrm{IR}} | R_{212} | \mu\mu'\nu \rangle_A$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{\mu' k'} \langle \mu | W_0 | \nu k' \rangle A\rho \langle \rho_1 k' | R_{101} | \mu \rangle * \langle \rho_2 k | R_{101} | \mu' \rangle$$

$$+ \sum_{\mu' \rho' k'} \langle \mu' | W_0 | \rho' k' \rangle \{ A\rho [S_k \langle \rho' \rho_1 k | R_{111} | \mu\nu \rangle_A \langle \rho_2 k' | R_{101} | \mu' \rangle$$

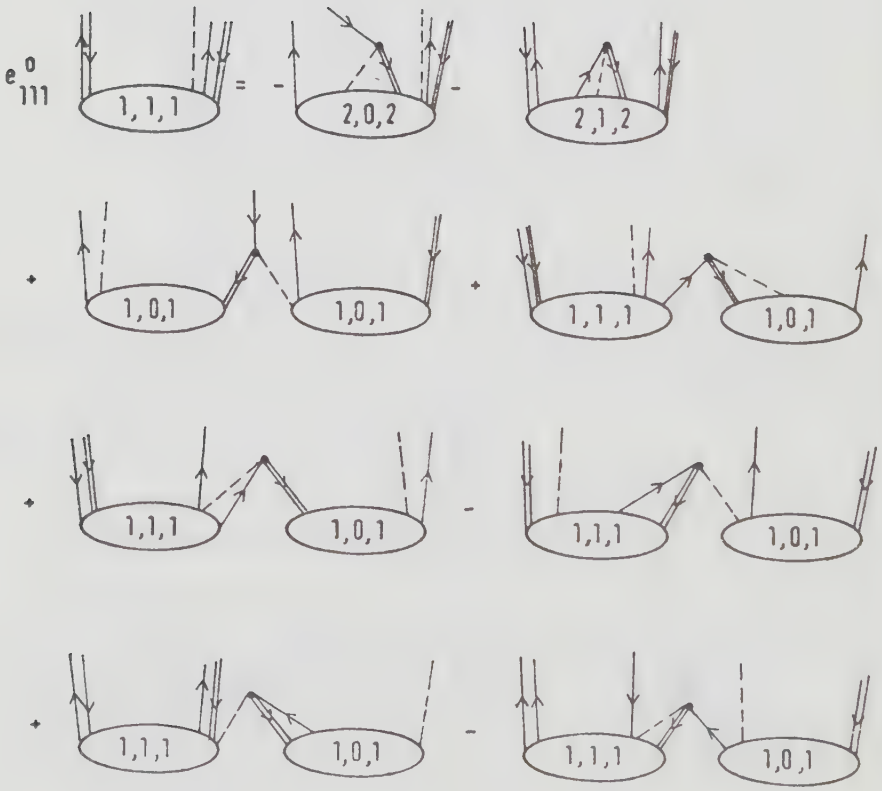
$$- \langle \rho' \rho_1 k | R_{111} | \mu'\nu \rangle_A \langle \rho_2 k' | R_{101} | \mu \rangle]$$

$$+ \langle \rho_1 \rho_2 k' | R_{111} | \mu\nu \rangle_A \langle \rho' k | R_{101} | \mu' \rangle$$

$$- S_k \langle \rho_1 \rho_2 k' | R_{111} | \mu'\nu \rangle \langle \rho' k | R_{101} | \mu \rangle \}$$

$$+\frac{1}{2} A\rho \langle \rho_1 k\, \rho_2 \mid W_0^+(1)\, S_{111} \mid \mu\nu \rangle_A$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{\nu'\tau} \langle \nu' k \mid W_0^+ \mid \tau\pi \rangle \langle \pi\tau\, \rho_1\, \rho_2 \mid S_{12} \mid \mu\, \nu\nu' \rangle_A \qquad (4o)$$

Oder in Diagrammen:



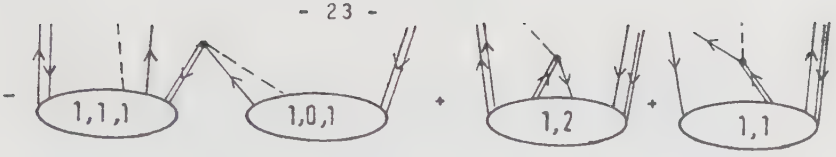


Abb. 5

Diese drei Gleichungen sollen genügen, um die Struktur des Modells im Sektor (2 n,n) zu verdeutlichen. Es ist zwar im Prinzip auch keine Schwierigkeit, die allgemeine (k,l,m) bzw. (i,j)-Gleichung anzugeben, dies würde jedoch nicht wesentlich zum weiteren Verständnis des Modells beitragen.

Im nächsten Abschnitt soll nun die Renormierung des Vielteilchen-Lee-Modells behandelt sowie ein paar Bemerkungen grundsätzlicher Natur zum Modell und der Renormierung gemacht werden.

4. Die N-V-Materie-Gleichungen mit renormierten Parametern

Betrachtet man nun noch einmal die Renormierung des Lee-Modells im Einteilchen-Sektor, so lassen sich renormierte Einteilchen-Energie sowie renormierte Vertexfunktion in Diagrammen wie folgt angeben (siehe Gleichungen 13 und 16):

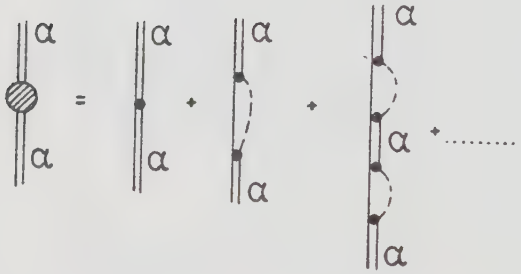


Abb. 6

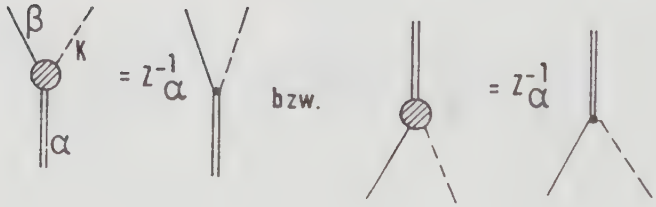


Abb. 7

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß sich die Vertexrenormierung des Lee-Modells auf eine "Kopplungskonstantenrenormierung" beschränkt, wenn man von einer impulsabhängigen nichtrenormierten Kopplungskonstanten ausgeht. Renormierungsdiagramme wie z.B.

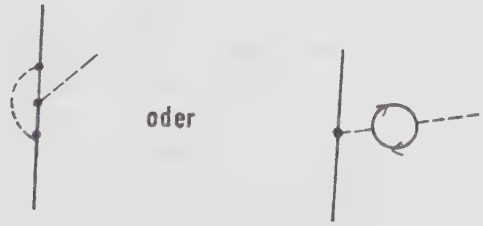


Abb. 8

können hier nicht auftauchen, da sowohl das N- als auch das Θ-Teilchen "nackte" Teilchen sind, und nur das V-Teilchen "anzuziehen" ist.

Betrachtet man nun die diagrammatische Darstellung der drei aufgestellten Gleichungen, so ist leicht zu erkennen, daß die R_{101}-Amplitude zwei Funktionen in sich vereinigt. Sie übernimmt zum einen die Renormierung der Einteilchen-Energien, zum anderen enthält sie auch Beiträge aus der Ankopplung an das Vielteilchensystem, und zwar solche, die nur gleiche Bosonimpulse übertragen (RPA).

So taucht in jeder Gleichung z.B. im Term auf, bei dem die R_{101}-Amplitude einen Einschub in eine V-Teilchen-Linie von folgender Form macht:

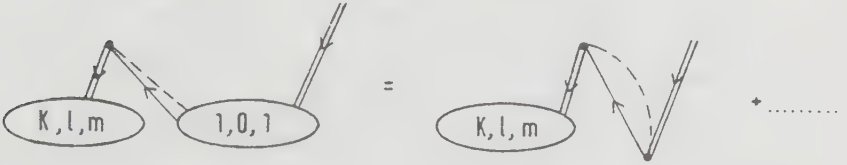
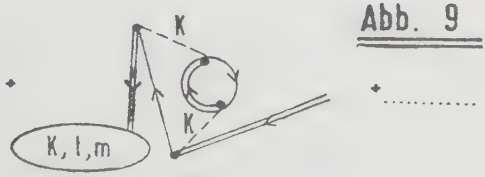


Abb. 9



Hierbei stellt das erste angegebene Diagramm einen Renormierungsgraphen erster Ordnung, das zweite jedoch ein Ringdiagramm, also einen echten Vielteilcheneffekt, dar.

Nun ist eine vollständige Trennung der R_{101}-Amplitude in Korrelations- und Renormierungsanteile auf Grund der in allen Gleichungen auftretenden Energienenner, sowie auf Grund der Tatsache, daß auch "reine" Vielteilcheneffekte in den Ankopplungen an R_{101} auftreten, nicht möglich, es wird jedoch noch gezeigt werden, daß die R_{101}-Amplitude auch die Funktion der Energienennerrenormierung übernimmt.

Hingegen ist es möglich, durch die Definition neuer, renormierter Korrelationsfunktionen R bzw. S sämtliche auftretenden V-Teilchen-Linien "anzuziehen". Ersetzt man alle auftretenden Korrelationsfunktionen in den expS-Gleichungen nach

$$<\pi_1 \cdots \pi_i\ \rho_1 \cdots \rho_j | S_{ij} | \mu_1 \cdots \mu_i\ \nu_1 \cdots \nu_j> \rightarrow Z_{\mu_1} \cdots Z_{\mu_i}\ Z_{\pi_1} \cdots Z_{\pi_i} \\ * <\pi_1 \cdots \pi_i\ \rho_1 \cdots \rho_j | S_{ij} | \mu_1 \cdots \mu_i\ \rho_1 \cdots \rho_j> \qquad (41)$$

(R_{klm} entsprechend) und führt zusätzlich in den Energienennern die renormierten V-Teilchen-Energien ein, so lassen sich die drei hergeleiteten expS -Gleichungen schreiben als

$$e_1^0 <\rho k | R_{101} | \mu> = \sum_{\mu' \rho' k'} <\mu' W \rho' k'> [A_\mu A_\rho <\rho k' | R_{101} | \mu> <\rho' k | R_{101} | \mu'> \\ + Z_\mu^2 <\rho k | W^+ | \mu> \sum_{\nu \pi} <\nu k | W^+ | \pi> <\pi \rho | S_{11} | \mu \nu>_A \qquad (42)$$

$$
\begin{aligned}
& e_2^0 \langle \pi\rho | S_{11} | \mu\nu \rangle_A \\
&= 2 Z_\pi^2 \sum_{\rho' k'} \langle \pi | W | \rho' k' \rangle \langle \rho' \rho\, k' | R_{111} | \mu\nu \rangle_A \\
&- \frac{1}{2} \sum_{\mu' k'} \langle \mu | W | \nu k' \rangle \langle \pi \rho k | R_{201} | \mu\mu' \rangle_A \\
&- Z_\pi^2 \sum_{k'} \langle \pi | W | \nu k' \rangle \langle \rho k' | R_{101} | \mu \rangle \\
&+ \sum_{\mu' \rho' k'} \langle \mu' | W | \rho' k' \rangle \langle \pi\, \rho' \rho\, k' | R_{211} | \mu\mu'\nu \rangle_A \\
&+ \sum_{\mu' \rho' k'} \langle \mu' | W | \rho' k' \rangle A_\mu A_\rho \left[\langle \pi \rho' | S_{11} | \mu' \nu \rangle \langle \rho\, k' | R_{101} | \mu \rangle \right]_{\mathcal{L}}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

und schließlich

$$
\begin{aligned}
& e_3^0 \langle \rho_1 \rho_2\, k | R_{111} | \mu\nu \rangle_A \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\mu' k'} \langle \mu' | W | \nu k' \rangle \langle \rho_1 \rho_2 (k k')_S | R_{202} | \mu\mu' \rangle_A \\
&- \frac{3}{2} \sum_{\mu' \rho' k'} \langle \mu' | W | \rho' k' \rangle \langle \rho' \rho_1 \rho_2 (k k')_S | R_{212} | \mu\mu'\nu \rangle_A \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\mu' k'} \langle \mu' | W | \nu k' \rangle A_\rho \left[\langle \rho_1\, k' | R_{101} | \mu \rangle \langle \rho_2\, k | R_{101} | \mu' \rangle \right] \\
&+ \sum_{\mu' \rho' k'} \langle \mu' | W | \rho' k' \rangle \left[A_\rho A_\mu S_k \langle \rho' \rho_1 k | R_{111} | \mu\nu \rangle_A \langle \rho_2 k' | R_{101} | \mu' \rangle \right]_{\mathcal{L}}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu'\pi}\langle\nu' k|W^{+}|\pi\rangle\langle\pi\ \rho_1\rho_2|S_{12}|\mu\ \nu\nu'\rangle_A$$

$$+\frac{1}{2}\sum A\rho\langle\rho k|W^{+}|\pi\rangle\langle\pi\rho|S_{11}|\mu\nu\rangle_A \qquad (44)$$

Hierbei sind die drei Energienenner zu schreiben als

(45)

$$e_1^0 = t_\mu - t_\rho - \omega_k - z_\mu^2\ \Delta_\mu$$

$$e_2^0 = t_\mu + t_\nu - t_\pi - t_\rho - z_\mu^2\Delta_\mu + z_\pi^2\Delta_\pi \qquad (46)$$

$$e_3^0 = t_\mu + t_\nu - t_\rho - t_\rho - \omega_k - z_\mu^2\ \Delta_\mu$$

(47)

Wobei die Funktionen Δ_α nach Gleichung (13) gegeben ist durch

$$\Delta_\alpha = \sum_{\beta k}\frac{\langle\alpha|W|\beta k\rangle\langle\beta k|W^{+}|\alpha\rangle}{t_\alpha - t_\beta - \omega_k} \qquad (48)$$

Die Gleichung für die Energie (34) läßt sich hiermit wie folgt formulieren:

$$E = \sum_{\nu} t_{\nu} + \sum_{\mu} t_{\mu} - \sum_{\mu} z_{\mu}^{2} \Delta_{\mu} + \sum_{\mu} \langle \mu | WR_{101} | \mu \rangle \qquad (49)$$

Hiermit enthalten die expS-Gleichungen nur noch renormierte, also physikalische Parameter. Sie sind allerdings keineswegs frei von Divergenzen. Dies kann erst, wie im nächsten Kapitel gezeigt werden wird, durch eine Neudefinition der Energienenner erreicht werden, die dann die Renormierung des Vielteilchensystems vervollständigen.

III. Lösung der expS-Gleichungen in niedrigster Ordnung

1. Vorbemerkungen

Die schon mehrfach erwähnte Tatsache, daß der Amplitude R_{1o1} in der Hierarchie der expS-Gleichungen eine Sonderrolle zukommt, läßt den Schluß zu, daß Approximationen (siehe z.B. /21/ und /28/) bei deren Bestimmung zu einer Verfälschung der physikalischen Parameter (Masse des V-Teilchens, Kopplungskonstante) führen. Es ist daher angebracht, die Gleichung für R_{1o1} in dem Raum zu lösen, in dem sie definiert ist. Das in anderen Problemen angewandte Verfahren der Projektion in den mesonenfreien Raum /32, 33/ ist hier nicht ohne weiteres verwendbar, da es Approximationen in der (1,o,1)-Gleichung erzwingen würde. Es läßt sich aber zeigen, daß bei entsprechender Neudefinition der R_{1o1}-Amplituden die (1,o,1)-Gleichung ohne weitere (s.u.) Näherungen lösbar ist. Ein weiterer Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, daß die (1,1)-Gleichung dann (d.h. bei bekanntem R_{1o1}) analytisch lösbar ist.

Betrachtet man nun die Gleichung für die Energie der V-N-Materie (49), so sieht man, daß zu deren Berechnung nur die Kenntnis von R_{1o1} nötig ist. Wie schon erwähnt, enthält R_{1o1} das vollständige Renormierungsproblem sowie einen Teil der Mehrteilcheneffekte (RPA). Um einen weiteren Teil der Vielteilcheneffekte (z.B. Leitern) zu berücksichtigen, müssen auch die Amplituden höherer Ordnung sowie die Kopplung der entsprechenden Gleichungen

untereinander bestimmt werden. Das Programm dieser Arbeit soll es sein, dies durch die Bestimmung von S_{11} näherungsweise zu tun. Hierbei werden alle Zweiteilcheneffekte (z.B. Teilchen-Teilchen-, Teilchen-Loch-, Loch-Loch-Leitern, etc.), soweit sie aus Streuungen von N- an V-Teilchen resultieren, erfaßt. Die expS-Gleichung werden also im folgenden unter der Näherung

$$R_{klm} = 0 \quad \text{für} \quad (k, l, m) \neq (1,o,1)$$

und

$$Sij = 0 \quad \text{für} \quad (i, j) \neq (1,1)$$

gelöst und diskutiert werden.

2. Die (1,o,1)-Gleichung

Nutzt man die Tatsache aus, daß die hier behandelte N-V-Materie eine impulserhaltende Wechselwirkung besitzt, so lassen sich die Vertexfunktionen sowie die R_{1o1}-Amplituden wie folgt neu definieren:

$$\langle \alpha | W | \beta k \rangle = \langle p_\alpha {}^s\alpha | W | p_\alpha - k {}^s\beta ; k \rangle =: W_p^{{}^s\alpha\, {}^s\beta}(k) \quad (1)$$

und entsprechend

$$\langle \rho k | R_{101} | \mu \rangle = \langle p - k, s_\rho ; k | R_{101} | p\ s_\mu \rangle =: R_p^{{}^s\mu {}^s\rho}(k) \quad (2)$$

Bei der Definition (2) ist zu beachten, daß es sich bei $|\mu\rangle$ um einen "Loch"-Zustand ($p < p_f$) und bei $|\rho\rangle$ um einen "Teilchen"-Zustand ($p > p_f$) handelt. Für die Impulse p, k bedeutet dies:

$$R_p^{{}^s\mu {}^s\rho}(k) = \begin{cases} \neq 0 & \text{für } |p| < p_f \text{ und } |p-k| > p_f \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Diese Bedingung sei im folgenden immer in der Definition von $R_p^{s_\rho s_\mu}(k)$ enthalten. Die Indizes s_μ, s_ρ stehen für den Spinzustand des V- bzw. N-Teilchens.

Beachtet man weiter, daß sowohl die Funktion Z_α als auch Δ_α nicht vom Spin des V-Teilchens abhängen (s. Anhang A) ($Z_\alpha = Z_p$, $\Delta_\alpha = \Delta_p$), so läßt sich die R_{101}-Gleichung (II.42), die im folgenden der Einfachheit halber als R-Gleichung bezeichnet wird, wie folgt angeben:

$$
\begin{aligned}
e_1^0 R_p^{s\mu s\rho}(k) = {} & Z_p^2 W_p^{s\mu s\rho *}(k) \\
& + \sum_{\substack{p's's' \\ \mu\rho}} W_{p'}^{s'\mu s'\rho}(k) R_{p'}^{s'\mu s'\rho}(k) R_p^{s\mu s\rho}(k) \\
& - \sum_{\substack{p's's' \\ \mu\rho}} W_{p'}^{s'\mu s'\rho}(\tilde{p}) R_{p'}^{s'\mu s\rho}(\tilde{p}) R_p^{s\mu s'\rho}(k) \qquad (4) \\
& - \sum_{\substack{k's's \\ \mu\rho}} W_p^{s'\mu s'\rho}(k') R_p^{s\mu s\rho}(k') R_p^{s'\mu s\rho}(k)
\end{aligned}
$$

Der Impulsvektor $\tilde{p}$ in der dritten Zeile ist dabei definiert durch

$$\tilde{p} := p' - p + k \qquad (5)$$

Es handelt sich also hier um einen Austauschterm, der aus der totalen Antisymmetrie der Wellenfunktion resultiert.

Schreibt man nun Gleichung (4) in allen vier möglichen Spin-Kanälen ($\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$, der erste Spin-Index ist jeweils der Spin des V-Teilchens), explizit auf, so erhält man einen Satz von vier komplexen

Integralgleichungen, die alle untereinander gekoppelt sind. Um die Struktur dieser Gleichungen genauer untersuchen zu können, müssen zunächst einige Annahmen über die Wechselwirkung W gemacht werden.

Ausgehend von der Lagrange-Dichte

$$L = i g \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi \Phi \qquad (6)$$

(hierbei sind $\bar{\psi}, \psi$ die Feldoperatoren der Fermionen, Φ der des Bosons, τ der Isospinvektor; vgl. /28/) gelangt man zu der Forderung (s. a. Kap. IV), daß die Wechselwirkung die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$W_p^{\uparrow\uparrow}(k) = W_p^{\downarrow\downarrow}(k)^* \qquad (a)$$

$$W_p^{\uparrow\downarrow}(k) = -W_p^{\downarrow\uparrow}(k)^* \qquad (b) \qquad (7)$$

$$W_p^{\uparrow\uparrow}(k) + W_p^{\downarrow\downarrow}(k) = 0 \qquad (c)$$

Durch Einsetzen dieser Eingeschaften in die Gleichungen für $R^{\uparrow\uparrow}$, $R^{\uparrow\downarrow}$, $R^{\downarrow\uparrow}$ und $R^{\downarrow\downarrow}$ läßt sich sofort zeigen, daß die Eingeschaften (7.a) und (7.b) auf die R-Amplituden übergehen. Weiter folgt aus der Gesamtdrehimpulserhaltung der N-V-Materie, daß auch (7.c) eine Eigenschaft von R ist. Also gilt:

$$R_p^{\uparrow\uparrow}(k) + R_p^{\downarrow\downarrow}(k) = 0$$
$$R_p^{\uparrow\uparrow}(k) = R_p^{\downarrow\downarrow}(k)^* \qquad (8)$$
$$R_p^{\uparrow\downarrow}(k) = -R_p^{\downarrow\uparrow}(k)^*$$

Nun bietet sich eine neue Definition von Vertex- und Korrelationsfunktionen an, die dann alle reell sind (und Spin-Singuletts bzw. Spin-Tripletts entsprechen), nämlich

$$R^{\phi} := \frac{1}{2}(R^{\uparrow\uparrow} + R^{\downarrow\downarrow}) \equiv 0 \qquad (9)$$
$$R^{o} := \frac{1}{2i}(R^{\uparrow\uparrow} - R^{\downarrow\downarrow})$$
$$R^{+} := \frac{1}{2i}(R^{\uparrow\downarrow} + R^{\downarrow\uparrow})$$
$$R^{-} := -\frac{1}{2}(R^{\uparrow\downarrow} - R^{\downarrow\uparrow})$$

Entsprechend seien die Funktionen W^{ϕ}, W^{o}, W^{+} definiert. W^{-} gibt man jedoch zweckmäßigerweise (aus Gründen, die später noch erläutert werden) ein entgegen gesetztes Vorzeichen.

$$W^{-} = \frac{1}{2}(W^{\uparrow\downarrow} - W^{\downarrow\uparrow}) \qquad (10)$$

Mit dieser Definition lassen sich die vier komplexen Gleichungen für R als reelle Gleichungen schreiben.

Die Gleichung für $R^{\emptyset}$

$$
\begin{aligned}
0 = R^{0}_{p}(k) \Big\{ & \sum_{p'} \left[W^{+}_{p'}(\tilde{p})\, R^{-}_{p'}(\tilde{p}) - W^{-}_{p'}(\tilde{p})\, R^{+}_{p'}(\tilde{p}) \right] \\
& + \sum_{k'} \left[W^{+}_{p}(k')\, R^{-}_{p}(k') - W^{-}_{p}(k')\, R^{+}_{p}(k') \right] \Big\} \\
+ R^{+}_{p}(k) \Big\{ & \sum_{p'} \left[W^{-}_{p'}(\tilde{p})\, R^{0}_{p'}(\tilde{p}) - W^{0}_{p'}(\tilde{p})\, R^{-}_{p}(\tilde{p}) \right] \\
& + \sum_{k'} \left[W^{-}_{p}(k')\, R^{0}_{p}(k') - W^{0}_{p}(k')\, R^{-}_{p}(k') \right] \Big\} \\
+ R^{-}_{p}(k) \Big\{ & \sum_{p'} \left[W^{0}_{p'}(\tilde{p})\, R^{+}_{p'}(\tilde{p}) - W^{+}_{p'}(\tilde{p})\, R^{0}_{p'}(\tilde{p}) \right] \\
& + \sum_{k'} \left[W^{0}_{p}(k')\, R^{+}_{p}(k') - W^{+}_{p}(k')\, R^{0}_{p}(k) \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Die Gleichung für R^0

$$
\begin{aligned}
e_1 R^0_p(k) = &- Z_p^2 W^0_p(k) \\
&+ R^+_p(k) \Big\{ \sum_{p'} \left[W^+_{p'}(\tilde{p})\, R^0_{p'}(\tilde{p}) - W^0_{p'}(\tilde{p})\, R^+_{p'}(\tilde{p}) \right] \\
&\quad + \sum_{k'} \left[W^+_p(k')\, R^0_p(k') - W^0_p(k')\, R^+_p(k') \right] \Big\} \\
&+ R^-_p(k) \Big\{ \sum_{p'} \left[W^-_{p'}(\tilde{p})\, R^0_{p'}(\tilde{p}) - W^0_{p'}(\tilde{p})\, R^-_{p'}(\tilde{p}) \right] \\
&\quad + \sum_{k'} \left[W^-_p(k')\, R^0_p(k') - W^0_p(k')\, R^-_p(k') \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Die Gleichungen für R^+ und R^- gehen durch zyklische Vertauschung des Tritupels (0, +, -) bei der Indizierung der Funktionen W und R aus der R^0-Gleichung hervor.

Der Energienenner e_1 ist definiert durch:

$$e_1 := e_1^0 + \sum_{i=0,+,-} \left\{ 2 \sum_{p'} W_{p'}^i(k)\, R_{p'}^i(k) - \sum_{p'} W_{p'}^i(\tilde{p})\, R_{p'}^i(\tilde{p}) - \sum_{k'} W_p^i(k)\, R_p^i(k) \right\} \tag{13}$$

Die Eigenschaft, daß die drei Gleichungen für R^0, R^+ und R^- durch zyklische Vertauschung der Indizes (0, +, -) auseinander hervorgehen, legt die Definition zweier vektorwertiger Funktionen nahe, nämlich

$$\vec{W}_p(k) := \begin{pmatrix} W_p^0(k) \\ W_p^+(k) \\ W_p^-(k) \end{pmatrix} \tag{14}$$

und

$$\vec{R}_p(k) := \begin{pmatrix} R_p^0(k) \\ R_p^+(k) \\ R_p^-(k) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Hiermit lassen sich die Gleichungen (11), (12) bzw. die entsprechenden Gleichungen für R^+, R^- in eine sehr einfache Form bringen, und zwar erhält man aus (11)

$$\boxed{\vec{R}_p(k) \cdot \vec{A}_p(k) = 0} \tag{16}$$

und aus den übrigen drei Gleichungen

$$e_1 \vec{R}_p(k) = - Z_p^2 \vec{W}_p(k) - \vec{R}_p(k) \times \vec{A}_p(k) \qquad (17)$$

Der Energienenner e_1 ist hierbei zu schreiben als

$$e_1 = e_1^0 + 2 \sum_{p'} \vec{W}_{p'}(k) \cdot \vec{R}_{p'}(k) - \sum_{p'} \vec{W}_{p'}(\tilde{p}) \cdot \vec{R}_{p'}(\tilde{p}) - \sum_{k'} \vec{W}_p(k') \vec{R}_p(k') \qquad (18)$$

und der Vektor $A_p(k)$ ist definiert durch

$$\vec{A}_p(k) := \sum_{p'} (\vec{W}_{p'}(\tilde{p}) \times \vec{R}_{p'}(\tilde{p})) + \sum_{k'} (\vec{W}_p(k') \times \vec{R}_p(k')) \qquad (19)$$

Die Gleichungen (16) und (17) haben wir also im folgenden zu lösen. Hierbei fällt auf, daß die Amplitude R durch diese beiden Gleichungen überbestimmt ist. Jedoch handelt es sich bei Gleichung (17) wegen des auftretenden Energienenners e_1 um eine nichtlineare Integralgleichung, die im allgemeinen keine eindeutige Lösung besitzt. Gleichung (16) ist also hier als Nebenbedingung zu interpretieren, die aus der Lösungsmannigfaltigkeit von Gleichung (17) die Lösung des Problems heraussucht.

Die Lösung soll im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

3. Die Lösung der (1,o,1)-Gleichung

Die beiden zu diskutierenden Gleichungen sind

$$\vec{R} \cdot \vec{A} = 0 \tag{2o}$$

sowie

$$\vec{R} = \alpha \vec{W} + \beta \vec{R} \times \vec{A} \tag{21}$$

Der Obersichtlichkeit halber wurden hier die Impulsvariablen weggelassen; sie seien im folgenden bei allen auftretenden Funktionen als gleich angenommen. Weiter wurden die Definitionen

$$\alpha = -\frac{Z_p^2}{e_1} \quad , \beta = -\frac{1}{e_1} \tag{22}$$

verwendet. Hierbei ist zu beachten, daß sowohl α als auch β in einem integralen, aber skalaren Zusammenhang mit R und W stehen.

Betrachtet man nun noch einmal die Struktur des Vektors A, der durch Gleichung (19) definiert war, so erkennt man, daß eine Lösung von Gleichung (21) unmittelbar gegeben ist durch

$$\vec{R} = \alpha \vec{W} , \tag{23}$$

da mit dieser Lösung der Vektor A trivial verschwindet, und damit auch Gleichung (2o) sofort erfüllt ist. Ebenfalls ist leicht zu sehen, daß dies die einzige Lösung in Richtung W ist. Um nun Aussagen über die Eindeutigkeit der Lösung (23) machen zu können, soll zuerst bewiesen werden, daß es keine Lösung gibt, die orthogonal zu W ist.

Man nehme an, es existiere eine Lösung X von Gleichung (21), die senkrecht auf W steht. Gleichung (21) lautet für diese Lösung

$$\vec{X} = \alpha \vec{W} + \beta \vec{X} \times \vec{A} \tag{24}$$

Das bedeutet aber, daß sich der Vektor X darstellen läßt als Summe von zwei Vektoren, die beide orthogonal zu X selbst sind. Folglich existiert keine zu W orthogonale Lösung von Gleichung (21). Hierbei wurde weder von Gleichung (2o) noch von den Eigenschaften des Vektors A Gebrauch gemacht.

Als nächstes soll nun die Eindeutigkeit der Lösung (23) unter der Einschränkung (2o) bewiesen werden.

Multipliziert man Gleichung (21) von links vektoriell mir R, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \vec{R} \times \vec{W} + \beta \; \vec{R} \times \vec{R} \times \vec{A} \\ &= \alpha \vec{R} \times \vec{W} + \beta \, (\vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{A}) - \vec{A} R^2) \end{aligned} \tag{25}$$

Nach Maßgabe von Gleichung (2o) verschwindet aber der zweite Term, und es läßt sich aus Gleichung (25) eine Aussage über die Richtung von A machen.

$$\vec{A} = \frac{\alpha}{R^2}\,\vec{R}\times\vec{W} \tag{26}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (21) ein, so ergibt sich

$$\vec{R} = \alpha\,\vec{W} + \frac{\alpha\beta}{R^2}\,\vec{R}\times\vec{R}\times\vec{W} \tag{27}$$

Nach der Umwandlung des doppelten Kreuzproduktes nach

$$\vec{R}\times\vec{R}\times\vec{W} = \vec{R}\,\vec{R}\cdot\vec{W} - \vec{W}R^2 \tag{28}$$

läßt sich Gleichung (27) schreiben als

$$\left(1 - \frac{\alpha\beta}{R^2}\,\vec{R}\cdot\vec{W}\right)\vec{R} = \alpha\,(1-\beta)\,\vec{W} \tag{29}$$

Dies bedeutet, daß alle Lösungen, die sowohl Gleichung (2o) als auch (21) erfüllen in Richtung W liegen müssen. Durch Einsetzen von Gleichungen (22) und (23) in (29) läßt sich leicht die Identität der Gleichungen (29) und (23) zeigen. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung (23) bewiesen und die R-Gleichung läßt sich nun wie folgt angeben:

$$\vec{R}_p\,(k) = -\frac{Z_p^2}{e_1}\,\vec{W}_p\,(k) \tag{3o}$$

Da nun e_1 nur skalare Ausdrücke ($R \cdot W$) enthält und weiterhin die Richtung von W als Eingangsparameter der Theorie fungiert, ist es hinreichend, eine skalare Gleichung für $W \cdot R$ zu lösen, die dann lautet:

$$\vec{W}_p(k) \cdot \vec{R}_p(k) = -\frac{Z_p^2}{e_1} W_p^2(k) \qquad (31)$$

Die (numerische) Lösung dieser Gleichung wird in Kapitel IV. noch ausführlicher diskutiert werden.

4. Die (1,1)-Gleichung

Im folgenden sei davon ausgegangen, daß die Lösung der R-Gleichung in der Form (31) erfolgt und daß die Funktion W · R nunmehr bekannt sei. Die Ankopplung der R-Gleichung an die (1,1)-Gleichung wird in Abschnitt III.6 diskutiert werden. Diese hat jedoch keinen Einfluß auf die hier verwendeten Argumente.

Unter Vernachlässigung aller höheren Amplituden und nach Ausführung der Antisymmetrisierungsoperationen A_μ und A_ρ läßt sich die Gleichung (II.43) wie folgt angeben.

$$e_2^0 \langle \pi\rho | S_{11} | \mu\nu \rangle_A = - Z_\pi^2 \sum_{k'} \langle \pi | W | \nu k' \rangle \langle \rho k' | R_{101} | \mu \rangle$$

$$- \sum_{\mu'\rho'k'} \langle \mu' | W | \rho' k' \rangle \{ \langle \pi\rho' | S_{11} | \mu\nu \rangle_A \langle \rho k' | R_{101} | \mu' \rangle$$

$$+ \langle \pi\rho | S_{11} | \mu'\nu \rangle_A \langle \rho' k' | R_{101} | \mu \rangle \qquad (32)$$

$$+ \langle \pi\rho' | S_{11} | \mu\nu \rangle_A \langle \rho k' | R_{101} | \mu \rangle \}$$

Ähnlich der Amplitude R_{101} ist auch die S_{11}-Aplitude impulserhaltend. Dies legt ähnlich wie in Gleichungen (1) und (2) eine verkürzende Schreibweise von S_{11} nahe. Es sei

$$ {}^{s_\pi s_\rho} S_{p_\pi p_\mu}^{s_\mu s_\nu}(k) := \langle \pi\rho | S_{11} | \mu\nu \rangle_A \qquad (33)$$

Hierbei und im folgenden seien in dieser Definition die Nebenbedingungen

$$P_\mu < P_f \;,\; P_\pi > P_f$$
$$|P_\mu - k| > P_f \;;\; |P_\pi - K| < P_f \tag{34}$$

implizit enthalten.

Bringt man nun die Definitionen (1), (2) und (33) in Gleichung (32) ein, so ergibt sich

$$e_2^{o\,s_\pi s_\rho} S^{s_\mu s_\nu}_{P_\pi P_\mu}(k) = -\, Z^2_{P_\pi} W^{s_\pi s_\nu}_{P_\pi}(k)\, R^{s_\mu s_\rho}_{P_\mu}(k)$$

$$-\sum_{s'k'}\Big\{ W^{s'_\mu s'_\rho}_{P_\mu}(k')\, {}^{s_\pi s'_\rho} S^{s_\mu s_\nu}_{P_\pi P_\mu}(k)\, R^{s_\mu s_\rho}_{\tilde P_\mu}(k') \tag{35}$$
$$+ W^{s'_\mu s'_\rho}_{P_\mu}(k')\, {}^{s_\pi s_\rho} S^{s'_\mu s_\nu}_{P_\pi P_\mu}(k)\, R^{s_\mu s'_\rho}_{P_\mu}(k')\Big\}$$
$$+\sum_{s'P'_\mu} W^{s'_\mu s'_\rho}_{P'_\mu}(k)\, {}^{s_\pi s'_\rho} S^{s'_\mu s_\nu}_{P_\pi P'_\mu}(k)\, R^{s_\mu s_\rho}_{P_\mu}(k)$$

Hierbei ist der Impuls $\tilde P_\mu$ gegeben durch

$$\tilde P_\mu := P_\mu - k + k' \;,\; |\tilde P_\mu| < P_f \tag{36}$$

Ähnlich dem Vorgehen bei der (1,o,1)-Gleichung läßt sich diese Gleichung in den einzelnen Spinkanälen hinschreiben. Hierbei ist zu beachten, daß im Gegensatz zur R_{1o1}-Amplitude (welche ja ein äußeres Boson emittiert), die S_{11}-Amplitude auch den Gesamtdrehimpuls des Subsystems erhält.

Folglich können nur folgende sechs Spinkombinationen auftreten $\uparrow\uparrow S^{\uparrow\uparrow}$, $\downarrow\downarrow S^{\downarrow\downarrow}$, $\uparrow\downarrow S^{\uparrow\downarrow}$, $\downarrow\uparrow S^{\downarrow\uparrow}$, $\uparrow\downarrow S^{\downarrow\uparrow}$, $\downarrow\uparrow S^{\uparrow\downarrow}$.

Weiterhin läßt sich aus Gleichung (35) die Identität folgender Amplituden herleiten, was im übrigen auch aus Symmetrieüberlegungen durchaus einsichtig ist:

$$\begin{aligned} {}^{\uparrow\uparrow}S^{\uparrow\uparrow} &= {}^{\downarrow\downarrow}S^{\downarrow\downarrow} \\ {}^{\uparrow\downarrow}S^{\uparrow\downarrow} &= {}^{\downarrow\uparrow}S^{\downarrow\uparrow} \\ {}^{\uparrow\downarrow}S^{\downarrow\uparrow} &= {}^{\downarrow\uparrow}S^{\uparrow\downarrow} \end{aligned} \qquad (37)$$

Führt man nun noch die Definition der Vektorkomponenten von W und R in Gleichung (32) ein, so lassen sich die drei S-Gleichungen folgendermaßen angeben:

Die ${}^{\uparrow\uparrow}S^{\uparrow\uparrow}$ -Gleichung

$$\begin{aligned} e_2^{(1)}\, {}^{\uparrow\uparrow}S_{P_\pi P_\mu}^{\uparrow\uparrow}(k) &= Z^2_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k)\, R^0_{P_\mu}(k) \\ &- R^0_{P_\mu}(k) \sum_{P'_\mu} W^0_{P'_\mu}(k) \left[{}^{\uparrow\uparrow}S_{P_\pi P'_\mu}^{\uparrow\uparrow}(k) - {}^{\uparrow\downarrow}S_{P_\pi P'_\mu}^{\downarrow\uparrow}(k) \right] \end{aligned} \qquad (38)$$

Die ${}^{\uparrow\downarrow}S^{\uparrow\downarrow}$ -Gleichung

$$e_2^{(1)}\, {}^{\uparrow\downarrow}S_{P_\pi P_\mu}^{\downarrow\uparrow}(k) = - Z^2_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k)\, R^0_{P_\mu}(k) \qquad (39)$$

$$+ R^0_{P_\mu}(k) \sum_{P'_\mu} W^0_{P'_\mu}(k) \left[{}^{\uparrow\uparrow}S_{P_\pi P'_\mu}^{\uparrow\uparrow}(k) - {}^{\uparrow\downarrow}S_{P_\pi P'_\mu}^{\downarrow\uparrow}(k) \right]$$

Die $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$-Gleichung

$$e_2^{(2)} \uparrow\downarrow S_{P_\pi P_\mu}^{\uparrow\downarrow}(k) = R^+_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^+_{P_\pi}(k) - \sum_{P'_\mu} W^+_{P'_\mu}(k) \uparrow\downarrow S_{P_\pi P'_\mu}^{\uparrow\downarrow}(k)\right\}$$

$$+ R^-_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^-_{P_\pi}(k) - \sum_{P'_\mu} W^-_{P'_\mu}(k) \uparrow\downarrow S_{P_\pi P'_\mu}^{\uparrow\downarrow}(k)\right\} \quad (40)$$

$$- i\Big[R^+_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^-_{P_\pi}(k) - \sum_{P'_\mu} W^-_{P'_\mu}(k) \uparrow\downarrow S_{P_\pi P'_\mu}^{\uparrow\downarrow}(k)\right\}$$

$$- R^-_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^+_{P_\pi}(k) - \sum_{P'_\mu} W^+_{P'_\mu}(k) \uparrow\downarrow S_{P_\pi P'_\mu}^{\uparrow\downarrow}(k)\right\}\Big]$$

Die beiden Energienenner sind hierbei wie folgt definiert:

$$e_2^{(1)} := e_2^0 - \sum_{k'}\Big\{\vec{W}_{\tilde{P}_\mu}(k')\cdot\vec{R}_{\tilde{P}_\mu}(k') + \vec{W}_{P_\mu}(k')\cdot\vec{R}_{P_\mu}(k')$$

$$+ i\Big[W^-_{\tilde{P}_\mu}(k') R^+_{\tilde{P}_\mu}(k') - W^+_{\tilde{P}_\mu}(k') R^-_{\tilde{P}_\mu}(k')$$

$$- W^-_{P_\mu}(k') R^+_{P_\mu}(k') + W^+_{P_\mu}(k') R^-_{P_\mu}(k')\Big]\Big\} \quad (41)$$

$$e_2^{(2)} := e_2^o - \sum_{k'} \{ \vec{W}_{\tilde{P}\mu}(k') \cdot \vec{R}_{\tilde{P}\mu}(k) + \vec{W}_{P\mu}(k') \cdot \vec{R}_{P\mu}(k') + i \left[W^-_{\tilde{P}\mu}(k') R^+_{\tilde{P}\mu}(k') - W^+_{\tilde{P}\mu}(k') R^-_{\tilde{P}\mu}(k) + W^-_{P\mu}(k) R^+_{P\mu}(k') - W^+_{P\mu}(k) R^-_{P\mu}(k') \right] \} \tag{42}$$

Betrachtet man nun die Gleichungen (38) und (39), so erkennt man sofort, daß

$$\uparrow\uparrow S \uparrow\uparrow = \uparrow\downarrow -S \downarrow\uparrow \tag{43}$$

Es sind also nun noch zwei S-Gleichungen zu lösen. Weiterhin gilt für R in aller Ordnung (siehe Gleichung (23)),

$$R^i \propto W^i \quad , \; i = 0, +, -$$

so daß in den Gleichungen (4o) - (42) die imaginären Anteile entfallen. Das bedeutet also unter anderem auch

$$e_2 := e_2^{(1)} = e_2^{(2)} = e_2^o - \sum_{k'} \left[\vec{W}_{\tilde{P}\mu}(k') \cdot \vec{R}_{\tilde{P}\mu}(k') + \vec{W}_{P\mu}(k') \cdot \vec{R}_{P\mu}(k') \right] \tag{44}$$

Mit den Definitionen

$$S^{(1)} := \uparrow\uparrow S \uparrow\uparrow \tag{45a}$$

und

$$S^{(2)} := {}^{\uparrow\downarrow} S^{\uparrow\downarrow} \tag{45b}$$

lauten nun die beiden S-Gleichungen

$$e_2 \; S^{(1)}_{p_\pi p_\mu}(k) = R^0_{p_\mu}(k) \left\{ Z^2_{p_\pi} \; W^0_{p_\pi}(k) - 2 \sum_{p'_\mu} W^0_{p'_\mu}(k) \, S^{(1)}_{p_\pi p'_\mu}(k) \right\} \tag{46}$$

und

$$e_2 \; S^{(2)}_{p_\pi p_\mu}(k) = R^+_{p_\mu}(k) \left\{ Z^2_{p_\pi} \; W^+_{p_\pi}(k) - \sum_{p'_\mu} W^+_{p'_\mu}(k) S^{(2)}_{p_\pi p'_\mu}(k) \right\} \tag{47}$$

$$+ R^-_{p_\mu}(k) \left\{ Z^2_{p_\pi} \; W^-_{p_\pi}(k) - \sum_{p'_\mu} W^-_{p'_\mu}(k) \, S^{(2)}_{p_\pi p'_\mu}(k) \right\}$$

Diese beiden S-Gleichungen weisen einige erhebliche Unterschiede im Vergleich zur expS-Theorie mit einem phänomenologischen Potential auf (z.B. /34-36/). Zum einen handelt es sich hier um linerare Integralgleichungen. Alle nichtlinearen Anteile stecken bereits in dem (hier als bekannt angenommenen) R. Das bedeutet natürlich auch, daß der Energienenner e_2 keine Selbstkopplung an die S-Amplituden enthält. Hier finden sich lediglich Ankopplungen an die R-Gleichung und zwar, ähnlich wie im Energienenner e_1, nur über W · R.

Weiterhin fällt auf, daß die beiden S-Gleichungen untereinander nicht explizit gekoppelt sind. Auch die Abhängigkeit von R zeigt, daß hier ein besonderer Zusammenhang besteht. Und zwar hängt $S^{(1)}$ nur von den Komponenten $W^0 \; R^0$, $S^{(2)}$ von der Summe $W^+R^+ + \; W^-R^-$, also nur von einem Teil des inneren Produktes W · R ab. Außerdem hängen beide S-Amplituden über den Energienenner e_2 auch vom gesamten inneren Produkt W · R ab.

Im nächsten Abschnitt soll nun eine analytische Lösung der beiden S-Gleichungen hergeleitet werden.

5. Lösung der (1,1)-Gleichungen

Die $S^{(1)}$-Gleichung

Die hier zu lösende Gleichung lautet

$$e_2 S^{(1)}_{P_\pi P_\mu}(k) = R^0_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k) - 2\sum_{P'_\mu} W^0_{P'_\mu}(k)\, S^{(1)}_{P_\pi P'_\mu}(k)\right\} \tag{48}$$

Es handelt sich also hier um eine lineare Integralgleichung mit separablem Kern /37/. Man beachte, daß der Energienenner e_2 eine Funktion der drei Impulse p_π, p_μ und k ist.

$$e_2 = e_2(P_\pi, P_\mu, k)$$

Definiert man nun eine Funktion T^0 durch

$$T^0_{P_\pi}(k) := \sum_{P'_\mu} W^0_{P'_\mu}(k) S^{(1)}_{P_\pi P'_\mu}(k) \tag{49}$$

so läßt sich Gleichung (48) schreiben als

$$e_2 \; S^{(1)}_{P_\pi P_\mu}(k) = R^0_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k) - 2T^0_{P_\pi}(k)\right\} \tag{50}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $S^{(1)}$ wiederum in Gleichung (48) ein, so erhält man eine algebraische Gleichung für T^0, nämlich

$$T^0_{P_\pi}(k) = \left\{Z^2_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k) - 2T^0_{P_\pi}(k)\right\} \sum_{P'_\mu} \frac{W^0_{P'_\mu}(k) R^0_{P'_\mu}(k)}{e_2(P'_\mu)} \tag{51}$$

Mit der Definition

$$X_{P_\pi}(k) := \sum_{P'_\mu} \frac{W_{P'_\mu}(k)\, R_{P'_\mu}(k)}{e_2\ (P'_\mu)} \tag{52}$$

läßt sich die Lösung von Gleichung (51) angeben als

$$T^0_{P_\pi}(k) = Z^2_{P_\pi}\, W^0_{P_\pi}(k)\ \frac{X_{P_\pi}(k)}{1 + 2X_{P_\pi}(k)} \tag{53}$$

und damit folgt für die Lösung von Gleichung (48)

$$S^{(1)}_{P_\pi P_\mu}(k) = \frac{Z^2_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k) R^0_{P_\mu}(k)}{e_2}\left[1 - 2\,\frac{X_{P_\pi}(k)}{1 + 2X_{P_\pi}(k)}\right] \tag{54}$$

oder, wenn man nun die Definition (52) wieder einsetzt, so erhält man $S^{(1)}$ allein als Funktion von $W \cdot R$ (über den Energienenner e_2) und $W^0\ R^0$:

$$S^{(1)}_{P_\pi P_\mu}(k) = \frac{Z^2_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k) R^0_{P_\mu}(k)}{e_2}\left[1 + 2\sum_{P'_\mu} \frac{W^0_{P'_\mu}(K) R^0_{P'_\mu}(k)}{e_2\ (P'_\mu)}\right] \tag{55}$$

Die $S^{(2)}$-Gleichung

$$\begin{aligned} e_2\, S^{(2)}_{P_\pi P_\mu}(k) = {} & R^+_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^+_{P_\pi}(k) - \sum_{P'_\mu} W^+_{P'_\mu}(k)\, S^{(2)}_{P_\pi P'_\mu}(k)\right\} \\ & + R^-_{P_\mu}(k)\left\{Z^2_{P_\pi} W^-_{P_\pi}(k) - \sum_{P'_\mu} W^-_{P'_\mu}(k) S^{(2)}_{P_\pi P'_\mu}(k)\right\} \end{aligned} \tag{56}$$

Auch dies ist eine lineare Integralgleichung mit separablem Kern. Ähnlich dem Vorgehen bei der $S^{(1)}$-Gleichung definiert man die Funktionen T^+ und T^- durch

$$T^i_{P_\pi}(k) = \sum_{P'_\mu} W^i_{P'_\mu}(k) S^{(2)}_{P_\pi P'_\mu}(k) \quad , \; i = +,- \tag{57}$$

Einsetzen in Gleichung (49) liefert

$$\begin{aligned} e_2 \; S^{(2)}_{P_\pi P_\mu}(k) = {} & R^+_{P_\mu}(k) \left\{ Z^2_{P_\pi} W^+_{P_\pi}(k) - T^+_{P_\pi}(k) \right\} \\ & + R^-_{P_\mu}(k) \left\{ Z^2_{P_\pi} W^-_{P_\pi}(k) - T^-_{P_\pi}(k) \right\} \end{aligned} \tag{58}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $S^{(2)}$ nun wiederum in Gleichung (56) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & R^+_{P_\mu}(k) T^+_{P_\pi}(k) + R^-_{P_\mu}(k) T^-_{P_\pi}(k) \\ & = R^+_{P_\mu}(k) \sum_{P'_\mu} \left\{ \frac{Z^2_{P_\pi} W^+_{P'_\mu}(k)}{e_2(P'_\mu)} \left[R^+_{P'_\mu}(k) W^+_{P_\pi}(k) + R^-_{P'_\mu}(k) W^-_{P_\pi}(k) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{W^+_{P'_\mu}(k)}{e_2(P'_\mu)} \left[R^+_{P'_\mu}(k) T^+_{P_\pi}(k) + R^-_{P'_\mu}(k) T^-_{P_\pi}(k) \right] \right. \\ & \quad + R^-_{P_\mu}(k) \sum_{P'_\mu} \left\{ \frac{Z^2_{P_\pi} W^-_{P'_\mu}(k)}{e_2(P'_\mu)} \left[R^+_{P'_\mu}(k) W^+_{P_\pi}(k) + R^-_{P'_\mu}(k) W^-_{P_\pi}(k) \right] \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{W^-_{P'_\mu}(k)}{e_2(P'_\mu)} \left[R^+_{P'_\mu}(k) T^+_{P_\pi}(k) + R^-_{P'_\mu}(k) T^-_{P_\pi}(k) \right] \right. \right. \end{aligned} \tag{59}$$

Da nun die beiden Funktionen R^+ und R^- per definitionem linear unabhängig sind, müssen ihre Koeffizienten auf beiden Seiten von Gleichung (59) übereinstimmen. Das bedeutet

$$T^+_{P\pi}(k) = Z^2_{P\pi}\left\{W^+_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^+_{P'\mu}(k)R^+_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)} + W^-_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^+_{P'\mu}(k)R^-_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)}\right.$$

$$\left. - T^+_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^+_{P'\mu}(k)R^+_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)} - T^-_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^+_{P'\mu}(k)R^-_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)}\right. \quad (60)$$

und

$$T^-_{P\pi}(k) = Z^2_{P\pi}\left\{W^+_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^-_{P'\mu}(k)R^+_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)} + W^-_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^-_{P'\mu}(k)R^-_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)}\right.$$

$$\left. - T^+_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^-_{P'\mu}(k)R^+_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)} - T^-_{P\pi}(k)\sum_{P'\mu}\frac{W^-_{P'\mu}(k)R^-_{P'\mu}(k)}{e_2(P'\mu)}\right. \quad (61)$$

Es handelt sich also hier um ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, nämlich T^+ und T^-. An dieser Stelle werden Zwischenrechnungen weggelassen, da sie zu recht komplizierten Gleichungen führen und zum weiteren Verständnis nicht beitragen. Die Vorgehensweise soll daher nur skizziert werden:

Man bestimme aus Gleichungen (6o) und (61) die Funktionen Γ^+ und Γ^-. Einsetzen dieser Funktionen in Gleichung (58) liefert dann die Lösung der $S^{(2)}$-Gleichung, die aber immer noch eine sehr komplizierte Struktur besitzt. Um die Analogie zur $S^{(1)}$-Gleichung besser aufzeigen zu können, ist es sinnvoll, bereits an dieser Stelle eine weitere Forderung an die Wechselwirkung zu stellen. Und zwar soll die verwendete Wechselwirkung "geschwindigkeitsunabhängig" sein, d.h., sie soll nur vom Impulsübertrag (also vom Bosonenimpuls) abhängen, nicht aber vom Impuls des V-Teilchens. In Formeln ausgedrückt bedeutet dies

$$W^i_{P_\mu}(k) = W^i(k) \qquad , i = 0 , + , - \tag{62}$$

Diese Eigenschaft besitzt die in dieser Theorie zugrunde gelegte Wechselwirkung a priori (vgl. Abschnitt III.2 sowie Kapitel IV).

Unter dieser Voraussetzung lautet nun die Lösung der $S^{(2)}$-Gleichung:

$$e_2 S^{(2)}_{P_\pi P_\mu}(k) = \frac{Z^2_{P_\mu}\left[W^+(k) R^+_{P_\mu}(k) + W^-(k) R^-_{P_\mu}(k)\right]}{1 + \sum_{P'_\mu} \frac{1}{e_2(P'_\mu)}\left[W^+(k) R^+_{P'_\mu}(k) + W^-(k) R^-_{P'_\mu}(k)\right]} \tag{63}$$

Hiermit gelte nunmehr die S_{11}-Gleichung als gelöst. Betrachtet man nun die beiden Lösungen (56) und (63), so stellt man fest, daß das innere Produkt $W \cdot R$ hier in zwei Anteile zerfällt, nämlich $W^0 R^0$ und $W^+ R^+ + W^- R^-$. Es wird jedoch im nächsten Abschnitt gezeigt werden, daß es möglich ist, die Kopplung zwischen der R- und den beiden S-Gleichungen ebenfalls allein als Funktion von $W \cdot R$ anzugeben.

6. Die Kopplung zwischen der (1,o,1)- und der (1,1)-Gleichung

Bisher ist die (1,o,1)-Gleichung unter Vernachlässigung des S_{11}-Terms behandelt worden. Will man den Einfluß von S_{11} auf die R_{1o1}-Amplitude berücksichtigen, so ist zur Gleichung (4) der Ausdruck

$$-\sum_{\nu\pi} \langle \nu k | W^{+} | \pi \rangle \langle \pi \rho | S_{11} | \mu \nu \rangle_{A}$$

$$= -\sum_{\substack{p_\pi \\ {}^s\pi\,{}^s\nu}} W^{s}_{p_\pi \pi_\pi} {}^s\mu^{*}(k)\, {}^s\pi\, {}^s\rho\, S^{s}_{p_\pi \mu_\mu}\, {}^{p_\mu}\nu\,(k) \tag{64}$$

zu addieren. Vollzieht man an diesem Ausdruck die gleichen Manipulationen wie an den R-Gleichungen, d.h., Aufspaltung nach (äußeren) Spinkanälen, Addition der Anteile nach Gleichung (9), Einführung der Vektorkomponenten von W, so erhält man in den vier Kanälen der R-Gleichungen folgende Zusatzterme:

Im $R^{\emptyset}$-Kanal:

$$-\sum_{p_\pi} W^{\emptyset}_{p_\pi \pi_\pi}(k) \left[{}^{\uparrow\uparrow}S^{\uparrow\uparrow}_{p_\pi p_\mu}(k) + {}^{\uparrow\downarrow}S^{\downarrow\uparrow}_{p_\pi p_\mu}(k) \right] = 0 \tag{65}$$

da hier beide Faktoren für sich bereits identisch Null sind. Dies bedeutet, daß die Gleichung (16), die ja aus der $R^{\emptyset}$-Gleichung resultierte, in allen Ordnungen exakt ist. Hieraus folgt weiterhin, daß der in Abschnitt III.2 geführte Eindeutigkeitsbeweis in allen Ordnungen exakt ist, da der S_{11}-Term

keine weiteren Lösungen erzeugt, was im letzten Abschnitt gezeigt worden ist.

In den anderen drei R-Kanälen sind folgende Ausdrücke zu addieren.

Im R^0-Kanal:

$$\sum_{P_\pi} W^0_{P_\pi}(k)\left[{}^{\uparrow\uparrow}S^{\uparrow\uparrow}_{P_\pi P_\mu}(k) - {}^{\uparrow\downarrow}S^{\downarrow\uparrow}_{P_\pi P_\mu}(k)\right] = 2\sum_{P_\pi} W^0_{P_\pi} S^{(1)}_{P_\pi P_\mu}(k) \tag{66}$$

Im R^+-Kanal:

$$\sum_{P_\pi} W^+_{P_\pi}(k)\,{}^{\uparrow\downarrow}S^{\uparrow\downarrow}_{P_\pi P_\mu}(k) = \sum_{P_\pi} W^+_{P_\pi}(k)\,S^{(2)}_{P_\pi P_\mu}(k) \tag{67}$$

und im R^--Kanal:

$$\sum_{P_\pi} W^-_{P_\pi}(k)\,{}^{\uparrow\downarrow}S^{\uparrow\downarrow}_{P_\pi P_\mu}(k) = \sum_{P_\pi} W^-_{P_\pi}(k)\,S^{(2)}_{P_\pi P_\mu}(k) \tag{68}$$

wobei die Funktionen $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ durch Gleichungen (56) und (63) gegeben sind. Auch hierbei fällt wiederum auf, daß die im letzten Abschnitt angesprochene Entkopplung der W^0 R^0-Anteile einerseits und der (W^+ R^+ + W^- R^-)-Anteile andererseits erhalten bleibt.

Beschränkt man sich nun , wie im letzten Abschnitt auf geschwindigkeitsunabhängige Wechselwirkungen, so läßt sich eine diagonale Matrix

$$\underline{\underline{S}}_{P_\mu}(k) := \sum_{P_\pi} \begin{pmatrix} 2S^{(1)}_{P_\pi P_\mu}(k) & 0 & 0 \\ 0 & S^{(2)}_{P_\pi P_\mu}(k) & 0 \\ 0 & 0 & S^{(2)}_{P_\pi P_\mu}(k) \end{pmatrix} \tag{69}$$

definieren und die vollständige R-Gleichung läßt sich dann wie folgt angeben

$$\vec{R}_P(k) = -\frac{1}{e_1}\left[Z_P^2\,\vec{W}(k) - \underline{\underline{S}}_P(k)\,\vec{W}(k)\right] \tag{70}$$

Die entsprechende Gleichung für das zu bestimmende innere Produkt W · R lautet dann

$$\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_P(k) = -\frac{1}{e_1}\left[Z_P^2\,W^2(k) - \vec{W}(k)\,\underline{\underline{S}}_P(k)\,\vec{W}(k)\right] \tag{71}$$

Hiermit ist nun die R-Gleichung vollständig. Nun ist $\underline{\underline{S}}_P(k)$ als Funktion der Komponenten von W und R bekannt, jedoch birgt die Berechnung des Ankopplungsterms $W\underline{\underline{S}}W$ noch einige technische Probleme in sich. Setzt man in diesen Ausdruck die im letzten

Abschnitt erhaltenen Lösungen für $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\vec{W}(k)\,\underline{\underline{S}}_p(k)\,\vec{W}(k)$$

$$= \sum_{P_\pi} \frac{Z_{P_\pi}^2}{e_2} \left\{ \frac{2W^{o2}(k)\,W^o(k)\,R_p^o(k)}{1+2\sum_{P'_\mu} \frac{W^o(k)R^o(k)}{e_2(P'_\mu)}} \right. \tag{72}$$

$$\left. + \frac{\left[W^2(k)-W^o(k)\right]\left[\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_p(k)-W^o(k)R_p^o(k)\right]}{1+\sum_{P'_\mu}\frac{1}{e_2(P'_\mu)}\left[\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_{P'_\mu}(k)-W^o(k)R^o_{P'_\mu}(k)\right]} \right\}.$$

Um also diesen Ausdrück zu bestimmen, ist sowohl die Kenntnis von W · R nötig, als auch die von W^o R^o. Dies ist zwar nach Gleichung (23) durchaus möglich, scheitert jedoch an technischen Schwierigkeiten. Die numerische Lösung der Gleichung für W · R ist bereits dermaßen rechenzeit- und speicherintensiv, daß eine parallele Berechnung von W^o R^o nicht möglich ist.

Daher sind an dieser Stelle einige weitere Oberlegungen notwendig. Die Funktion R kann ihrer Richtung nach - sofern man die des V-Teilchen-Impulses p_μ festlegt - nur von der Richtung von k und der des Spin-Vektors σ abhängen. Das bedeutet, daß sich R darstellen läßt als

$$\vec{R} = a\,\vec{\sigma} + b\,\vec{k} + c\,\vec{\sigma}\times\vec{k}$$

Der letzte Beitrag steht jedoch senkrecht auf k und kann daher nach dem in Abschnitt III.3 geführten Beweis bei der "reinen" R-Gleichung nicht auftreten. Da bei der Berechnung der Bindungsenergie nur Größen proportional zu k · R von Interesse sind, entfällt dieser Ausdruck in allen Ordnungen. Die letztlich zu berechende Funktion W · R hängt also nur noch von k^2 und $\vec{\sigma}\cdot\vec{k}$ ab. Da dies ebenfalls eine Eigenschaft der Funktion W^2 ist, liegt es nahe zu fordern, daß die Richtung von R durch höhere Ordnungen in den Korrelationen nicht gedreht wird. Was gleichbedeutend mit der Aussage ist, daß W Eigenvektor zur Matrix $\underline{\underline{S}}$ ist. Hieraus wiederum folgt unmittelbar

$$\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_p(k) = 3\,W^0(k)\,R_p^0(k) \qquad (73)$$

was im Mittel über alle Bosonenimpulse, also bei der Berechnung der Bindungsenergie, sicherlich richtig ist. Ober die Güte dieser Approximation für R selbst bzw. für das innere Produkt W · R läßt sich folgendes aussagen:

Wie später noch gezeigt wird, läßt sich die Berücksichtigung der Zweiteilchen-Korrelationen in der R-Gleichung als Störung des Energienenners e_1 interpretieren. Wie die numerischen Rechnungen gezeigt haben, ändert diese Störung wohl grundsätzlich den Verlauf der Bindungsenergie, ist aber zahlenmäßig klein gegen den ungestörten Energienenner. Des weiteren tritt die Störung nur in integraler Form auf, so daß eine partielle Mittelung bereits vor der Störung erfolgt. Daher ist zu erwarten, daß die oben

genannte Approximation recht nahe an der wahren Lösung liegt. Mit Hilfe dieser Näherung läßt sich jetzt also der Zusatzterm in der W · R-Lösung wie folgt angeben.

$$\vec{W}(k)\,\underline{\underline{S}}_p(k)\,\vec{W}(k) = W^2(k)\sum_{P_{T\!L}}\frac{Z_{P_{T\!L}}^2}{e_2}\,\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_p(k)\left\{\frac{3}{2}+\sum_{P'_\mu}\frac{1}{e_2(P'_\mu)}\,\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_{P'_\mu}(k)\right\}^{-1} \quad (74)$$

Das bedeutet, daß sich die Gleichung für W · R nach wie vor schreiben läßt als

$$\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_p(k) = -\frac{Z_p^2}{e_1}\,W^2(k)\,, \quad (75)$$

wenn man den Energienenner e_1 ersetzt durch

$$e_1 \to e_1 - W^2(k)\sum_{P_{T\!L}}\frac{Z_{P_{T\!L}}^2}{e_2}\left[\frac{3}{2}+\sum_{P'_\mu}\frac{\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_{P'_\mu}(k)}{e_2(P'_\mu)}\right]^{-1} \quad (76)$$

Hiermit ist das Problem der expS-Gleichungen in niedrigster Ordnung gelöst.

7. Die Gleichung für die Bindungsenergie

Nach Gleichung (II.49) ist die Bindungsenergie des Systems gegeben durch

$$E = \sum_{\nu} t_{\nu} + \sum_{\mu} t_{\mu} - \sum_{\mu} Z_{\mu}^2 \Delta_{\mu} + \sum_{\mu} \langle \mu | W R_{101} | \mu \rangle \qquad \text{(II.49)}$$

Bezeichnet man den letzten Ausdruck dieser Gleichung mit E_c und setzt die in Abschnitt III.1 eingeführten Definitionen auch hier ein, so ergibt sich

$$E = 4 \sum_{p} t_p - 2 \sum_{p} Z_p^2 \Delta_p + E_c \qquad (77)$$

Wobei E_c gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{\mu} \langle \mu | W R_{101} | \mu \rangle \\ &= \sum_{\mu \rho k} \langle \mu | W | \rho k \rangle \langle \rho k | R_{101} | \mu \rangle \\ &= \sum_{\substack{Pk \\ s_\mu s_\rho}} W_p^{s_\mu s_\rho}(k) R_p^{s_\mu s_\rho}(k) \\ &= -2 \sum_{Pk} \vec{W}_p(k) \cdot \vec{R}_p(k) \end{aligned} \qquad (78)$$

Dies bedeutet also, daß auch die Bindungsenergie nicht von der Richtung von W oder R abhängt, sondern

ebenfalls nur vom inneren Produkt W • R. Geschlossen läßt sich also die Bindungsenergie angeben als

$$E = 2\sum_{p}\left[2t_p - Z_p^2\,\Delta_p - \sum_{k}\vec{W}_p(k)\cdot\vec{R}_p(k)\right] \qquad (78)$$

Nach der Lösung der Gleichung für W • R läßt sich somit die Bindungsenergie bestimmen.

Im nächsten Kapitel soll nun auf die numerische Behandlung der R-Gleichung zunächst ohne und dann mit den Zwei-Teilchen-Korrelationen sowie auf die numerische Bestimmung der Bindungsenergie eingegangen werden.

IV. Numerische Behandlung

1. Vorbemerkungen

Um eine numerische Lösung der Gleichung (III.75) für $R(p, k, x)$ zu erhalten, muß zuerst eine Reihe von Input-Parametern festgelegt werden. Für die hier bearbeitete Variante des Modells, d.h., bei einer Startdeterminante aus einer gleichen Anzahl von V- und N-Teilchen ohne Bosonen bietet sich eine Identifizierung des Protons mit dem V-Teilchen, des Neutrons mit dem N-Teilchen und des π^+-Mesons mit dem Θ-Teilchen an. Das bedeutet, der Prozeß

$$V \rightleftharpoons N + \Theta$$

werde dargestellt durch den Prozeß

$$p \rightleftharpoons n + \pi^+$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß es sich hier nicht um ein realistisches Modell für Kernmaterie handelt, sondern lediglich um ein lösbares Modell der Quantenfeldtheorie, an dem sich die Renormierungseffekte studieren lassen und mit dessen Hilfe "Werkzeuge" für die Behandlung realistischer Modelle gewonnen werden sollen.

Ein weiterer wichtiger Eingangsparameter ist die Wechselwirkungsfunktion $\langle\alpha|W|\beta\, k\rangle$. Ebenso wie in /28/ soll hier die nichtrelativistische Näherung des Wechselwirkungs-Hamiltonians verwendet werden, die aus der Lagrange-Dichte der pseudoskalaren Theorie

$$L = i g \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi \Phi \qquad (1)$$

folgt.

Die Vertexfunktionen sind daher gegeben durch

$$\langle \alpha | W | \beta k \rangle = -ig \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{f(k)}{2m} \langle \chi_\alpha | \vec{\sigma} \cdot \vec{k} | \chi_\beta \rangle \cdot \delta_{p_\alpha, p_\beta + k} \tag{2}$$

Hier ist Ω das Volumen des Systems, g die Kopplungskonstante und f (k) der Formfaktor der Wechselwirkung (vgl. Abschnitt II.1). Der Formfaktor sei von der Form

$$f(k) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + k^2} \tag{3}$$

wobei Λ den cut-off-Parameter darstellt. Für die kinetischen Energien der Fermionen werden nichtrelativistische Ausdrücke, also z.B.

$$t_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2m} \quad , \quad m := \frac{1}{2}(m_n + m_p) \quad , \tag{4}$$

für das Θ-Teilchen relativistische Ausdrücke, also

$$\omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2} \quad , \quad \mu = m_\pi \tag{5}$$

verwendet.

Diese Theorie enthält nun also drei freie Parameter:

1. die Kopplungskonstante g, die die Stärke der Kopplung, also die Größenordnung der Wechselwirkungsenergie festlegt,
2. der cut-off-Parameter Λ, der die räumliche Ausdehnung der Wechselwirkung wiederspiegelt und
3. die Bosonenmasse μ (genauer: das Verhältnis zwischen Fermionen- und Bosonenmasse), die die Reichweite der Wechselwirkung parametrisiert.

Bei den numerischen Rechnungen werden diese drei Parameter gegeneinander variiert, und das Verhalten des Systems wird in Abhängigkeit von diesen untersucht. Ausgangspunkt dieser Variationen sei wiederum das realistische Kernmaterie-Modell mit

$$g = 13.22$$
$$\Lambda^2 = 1.1\,\mathrm{GeV}^2$$
$$\mu = m_{\pi^+} = 139.57\ \mathrm{MeV}/c^2 \qquad (6)$$

Im folgenden wird ein Einheitensystem verwendet in dem $\hbar = c = 1$ ist. D.h. alle Massen und Energien werden in Vielfachen von eV angegeben, alle Impulse in fm^{-1}. Des weiteren wird der Grenzübergang $N \to \infty$, $\Omega \to \infty$ vollzogen und zwar so, daß $\rho = \frac{N}{\Omega} = \text{const}$. Das bedeutet unter anderem, daß die auftretenden Summen über Impulse zu ersetzen sind durch z.B.

$$\sum_{\vec{k}} \to \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \qquad (7)$$

Als Parameter für die Dichte ρ diene der Fermi-Impuls p_f, der bestimmt ist nach

$$p_f^3 = \frac{3\pi^2}{2}\rho \qquad (8)$$

Mit diesen Vorgaben läßt sich die Gleichung (III.75) programmieren und numerisch lösen. In den nächsten Abschnitten wird nun die Gleichung (III.75) auf eine programmierbare Form gebracht werden.

2. Die numerische Lösung der R-Gleichung

In diesem Abschnitt soll zunächst die numerische Lösung der "reinen" R-Gleichung, d.h., also ohne Berücksichtigung der Zweiteilchenkorrelationen, diskutiert werden: Nach III.2 lautet die zu lösende Gleichung ($p = p_\mu$):

$$\vec{W}_p(k) \cdot \vec{R}_p(k) = -\frac{Z_p^2 \, W_p^2(k)}{e_1} \tag{9}$$

Hierbei ist zu beachten, daß der Energienenner e_1 von den Impulsvektoren p und k sowie vom inneren Produkt W · R selbst abhängt. Also

$$e_1 = f(p,k,\vec{W}\cdot\vec{R}) \tag{1o}$$

Da nun alle in Gleichung (9) auftretenden Größen Skalare sind, kann das innere Produkt W · R nur von den Beträgen der Impulse p und k, sowie vom inneren Produkt der beiden Impulse abhängen. Dies legt die Definition der Funktion $\tilde{R}(p, k, x)$ nahe:

$$\tilde{R}(p,k,x) := \vec{W}_p(k) \cdot \vec{R}_p(k) \tag{11}$$

Hierbei sind p und k die Beträge des V-Teilchen- bzw. des Boson-Impulses. Das Argument x ist der Cosinus des Winkels zwischen beiden Impulsvektoren:

$$x := \frac{\vec{p}\cdot\vec{k}}{p\;k} \tag{12}$$

Die Definition (11) der Korrelationsfunktion $\tilde{R}$ ist jedoch dem Vielteilchenproblem nicht angepaßt, da sie beim Grenzübergang $N \to \infty$, $\Omega \to \infty$ verschwindet. Sie muß daher auf das Volumen des Vielteilchen-Systems vor dem Grenzübergang normiert werden. Als zu berechnende Funktion sei daher definiert:

$$R(p,k,x) := \frac{\Omega}{4\pi^2} \tilde{R}(p,k,x) \tag{13}$$

Hiermit und mit Gleichung (2) lautet nun die zu lösende Gleichung

$$R(p,k,x) = -\frac{g^2}{32m^2\pi^2} \frac{f^2(k)\,k^2}{\omega_k} \frac{1}{e_1} \tag{14}$$

Die Funktion R(p, k, x) hat damit die Einheit MeV^{-2}. Zu beachten ist nach wie vor, daß R nur dann ungleich Null ist, wenn $|\vec{p} - \vec{k}| > p_f$ ist.

Zu bestimmen ist nun noch der Energienenner e_1. Dieser war nach Gleichungen (II.45) und (III.18) gegeben durch

$$e_1 = e_1^0 + 2\sum_{p'} \vec{W}_{p'}(k) \cdot \vec{R}_{p'}(k) - \sum_{p'} \vec{W}_{p'}(\tilde{p}) \cdot \vec{R}_{p'}(\tilde{p}) - \sum_{k'} \vec{W}_{p}(k') \cdot \vec{R}_{p}(k') \tag{III.18}$$

und

$$e_1^0 = t_\mu^2 - t_\rho^2 \omega_k - z_\mu^2 \Delta_\mu \tag{II.45}$$

Mit der Bedingung

$$\vec{p}_\rho = \vec{p}_\mu - \vec{k} \tag{15}$$

folgt also für den Energienenner e_1^o

$$\begin{aligned} e_1^o &= \frac{p^2}{2m} - \frac{(p-k)^2}{2m} - \omega_k - Z_p^2 \Delta_p \\ &= \frac{pkx}{m} - \frac{k^2}{2m} - \omega_k - Z_p \Delta_p \end{aligned} \tag{16}$$

Bezeichnet man nun den zweiten Term in Gleichung (III.18) mit $\frac{1}{2} e_1^{(1)}(k)$, so gilt für diesen

$$\begin{aligned} e_1^{(1)}(k) &= \sum_{p'} \vec{W}_{p'}(k) \cdot \vec{R}_{p'}(k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_V d^3 p' \, R(p', k, x') \end{aligned} \tag{17}$$

Das Integrationsvolumen V ist hier der Bereich der Fermi-Kugel, für den gilt

$$|\vec{p} - \vec{k}| > p_f .$$

Diese Einschränkung läßt sich in Bedingungen für die Integrationsgrenzen umwandeln. Das bedeutet im einzelnen:

für $p + k < p_f$ gilt $V = 0$

für $|p - k| > p_f$ gilt $-1 \leq x \leq 1$

sonst $\quad -1 \leq x \leq x_0$

Hierbei ist x_0 gegeben als

$$x_0 := \frac{p^2 + k^2 - p_f^2}{2pk} \tag{18}$$

Damit spaltet das Integral (17) auf in drei Beiträge
(i) für $0 \leq k \leq p_f$ ist

$$e^{(1)}(k) = \int_{p_f - k}^{p_f} dp' p'^2 \int_{-1}^{x_0} dx' R(p', k, x') \tag{19}$$

(ii) für $p_f < k < 2p_f$ ist

$$\begin{aligned} e_1^{(1)}(k) = &\int_{p_f - k}^{p_f} dp' p'^2 \int_{-1}^{1} dx' R(p', k, x') \\ &+ \int_{k - p_f}^{p_f} dp' p'^2 \int_{-1}^{x_0} dx' R(p', k, x') \end{aligned} \tag{2o}$$

(iii) und für $k \geq p_f$ ist

$$e_1^{(1)}(k) = \int_{0}^{p_f} dp' p'^2 \int_{-1}^{1} dx' R(p', k, x') \tag{21}$$

Entsprechend ergibt sich der dritte Term aus Gleichung (III.18) zu

$$
\begin{aligned}
e_1^{(2)}(p) &:= \sum_{k'} \vec{W}_p\,(k') \cdot \vec{R}_p\,(k') \\
&= \int_{p_f - p}^{p_f + p} dk'\, k'^2 \int_{-1}^{x_0} dx'\, R\,(p, k', x') \\
&+ \int_{p_f + p}^{\infty} dk'\, k'^2 \int_{-1}^{1} dx'\, R\,(p, k', x')
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Auf Grund der Struktur des Argumentes $\tilde{p}$ im dritten Ausdruck von Gleichung (III.18) kann hier die einschränkende Bedingung außer acht gelassen werden, da sie immer erfüllt ist. Es ist nämlich

$$
| p' - \tilde{p} | = | p' - (p' - p + k) | = | p - k | > p_f \tag{23}
$$

wegen der äußeren Bedingung für p und k. Mit der Definition von $e_1^{(3)}(p, k, x)$ ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
e_1^{(3)}(p, k, x) &:= \sum_{p'} \vec{W}_{p'}(\tilde{p}) \cdot \vec{R}_{p'}(\tilde{p}) \\
&= \int_0^{p_f} dp'\, p'^2 \int_{-1}^{1} dx'\, R\left(p', \sqrt{p'^2 + u^2 - 2p'ux}, \frac{p' - ux'}{\sqrt{p'^2 + u^2 - 2p'ux'}}\right)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Wobei u gegeben ist durch

$$\vec{u} := \vec{p} - \vec{k} \tag{25}$$

und u die z-Achse der Integration darstellt. Die Substitution

$$y := \sqrt{p'^2 + u^2 - 2\,p'\,u\,x'} \tag{26}$$

liefert für $e_1^{(3)}(p, k, x)$ die Form

$$e_1^{(3)}(p,k,x) = \frac{1}{u}\int_0^{p_f} dp'\,p'^2 \int_{|p'-u|}^{p'+u} dy\; y\,R\left(p', y, \frac{p'^2 + y^2 - u^2}{2p'\,y}\right) \tag{27}$$

Zur Berechnung dieses Integrals ist also eine Interpolation in zwei Richtungen erforderlich.

Mit Hilfe dieser Energienenneranteile läßt sich die Gleichung für R(p, k, x) also schreiben als

$$R(p,k,x) = -\frac{g^2}{32m^2\pi^2}\; Z_p^2\; \frac{f^2(k)\,k^2}{\omega_k}\left[e_1^0(p,k,x) + 2e_1^{(1)}(k) - e_1^{(2)}(p) - e_1^{(3)}(p,k,x)\right]^{-1} \tag{28}$$

und in dieser Form auch programmieren. Zur Lösung der Gleichung (27) wird ein Iterationsverfahren verwendet. Das Konvergenzverhalten sowie die Lösung des Problems im asymptotischen Bereich ($k \longrightarrow \infty$) wird im Anhang B noch diskutiert werden.

3. Die Einbeziehung der Zweiteilchen-Korrelationen

Will man in der (gelösten) R-Gleichung die Zweiteilchenkorrelationen mit berücksichtigen, so ist der Energienenner e_1 um einen Ausdruck zu erweitern, der nach Gleichung (III.76) gegeben ist durch

$$\delta_{11}(p,k,x) := -W^2(k) \sum_{p_{\pi}} \frac{Z^2_{p_{\pi}}}{e_2} \left[\frac{3}{2} + \sum_{p'} \frac{\vec{W}(k)\cdot\vec{R}_{p'}(k)}{e_2(p')} \right]^{-1} \quad (29)$$

Hierbei ist wiederum zu beachten, daß der Energienenner e_2 eine Funktion von drei Impulsvektoren ist, nämlich

$$e_2 = f(p,k,p_{\pi}) \quad (30)$$

Die explizite Form von e_2 lautet

$$e_2 = \frac{k}{m}(px - p_{\pi}x_{\pi}) - (Z^2_p \Delta_p - Z^2_{p_{\pi}} \Delta_{p_{\pi}}) - 2e_1^{(2)}(p) \quad (31)$$

Hierbei ist x_{π} der Cosinus des Winkels zwischen p_{π} und k und $e_1^{(2)}(p)$ der nach Gleichung (22) bestimmte Anteil des Energienenners e_1.

Nimmt man nun an Ausdruck (29) die gleichen Manipulationen vor wie im Abschnitt (IV.2) an der "reinen" R-Gleichung und berücksichtigt weiterhin die Nebenbedingung für den Vektor p_{π}, nämlich

$$|\vec{p}_{\pi} - \vec{k}| < p_f \quad (32)$$

so spaltet der Ausdruck δ_{11} in zwei Fälle auf, und zwar

(i) für $k \leq 2p_f$

$$\delta_{11}(p,k,x) = -\frac{g^2}{32m^2\pi^2}\,\frac{f^2(k)k^2}{\omega_k}\int_{p_f}^{k+p_f} dp_\pi\, Z_{p_\pi}^2 p_\pi^2 \int_{x_o^{(2)}}^{1} dx_\pi\, \frac{1}{e_2} \tag{33}$$

$$\cdot\left\{\frac{3}{2} + \int_0^{p_f} dp'\, p'^2 \int_{-1}^{1} dx' \frac{R(p',k,x')}{e_2(p')}\right\}^{-1}$$

sowie

(ii) für $k > 2p_f$

$$\delta_{11}(p,k,x) = -\frac{g^2}{32m^2\pi^2}\,\frac{f^2(k)k^2}{\omega_k}\int_{k-p_f}^{k+p_f} dp_\pi Z_{p_\pi}^2 p_\pi^2 \int_{x_o^{(2)}}^{1} dx_\pi\, \frac{1}{e_2} \tag{34}$$

$$\cdot\left\{\frac{3}{2} + \int_0^{p_f} dp'\, p'^2 \int_{-1}^{1} dx' \frac{R(p',k,x')}{e_2(p')}\right\}^{-1}$$

Die Größe $x_o^{(2)}$ ist hierbei gegeben durch

$$x_o^{(2)} := \frac{p_\pi^2 + k^2 - p_f^2}{2\,p_\pi\,k} \tag{35}$$

Weiterhin ist zu beachten, daß bei der Bestimmung der beiden Integrale über p' und x' die gleiche Aufspaltung in die drei Fälle $0 \leq k \leq p_f$, $p_f < k < 2p_f$ und $k \geq 2p_f$ stattfindet, wie z.B. in den Gleichungen (19), (2o), (21).

Dieser Ausdruck ist zwar im Prinzip in dieser Form programmierbar, jedoch scheitert hier die Durchführung an den technischen Gegebenheiten. Da bereits die Lösung der "reinen" R-Gleichung numerisch relativ zeit- und speicheraufwendig ist und die Hinzunahme des S_{11} - Terms die Lösung eines Vierfach-Integrals in der innersten Schleife erforderlich macht, würde die Durchführung dieses Programms die Grenze des technisch machbaren weit übersteigen.

Folglich sind zur numerischen Behandlung der Zweiteilchen-Korrelationen weitere Approximationen nötig.

Betrachtet man die aus der "reinen" R-Gleichung numerisch gewonnene Lösung und untersucht deren Verhalten in Abhängigkeit der drei Variablen p, k und x (vgl. Kap. V), so stellt man fest, daß die Abhängigkeit in p- und x-Richtung streng linear ist. Eine kompliziertere Struktur besitzt die Funktion R lediglich in k-Richtung.

Dies legt für die in Gleichung (34) auftretenden Integrale eine Näherung der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (36)$$

nahe. Selbst mit dieser Approximation behalten die Ausdrücke (33) und (39) noch eine sehr komplexe Struktur, welche zum Teil auf die Unterscheidung der drei Fälle $0 \leq k \leq p_f$, $p_f < k < 2p_f$ und $k \gg 2p_f$ zurückzuführen ist. In dieser Näherung ist die Einbeziehung der Zweiteilchen-Korrelationen jedoch - wenn auch mit sehr großem technischen Aufwand - numerisch durchführbar.

Die explizite Form von (33) und (34) unter Verwendung der Näherung (36) ist im Anhang B ausführlich hergeleitet und soll an dieser Stelle daher nicht angegeben werden.

4. Die Berechnung der Bindungsenergie

Nach Gleichung (III.78) ist die Bindungsenergie bestimmt durch

$$\mathcal{E} = 2 \sum_p \left[2t_p - Z_p^2 \, \Delta_p - \sum_k \vec{W}_p(k) \cdot \vec{R}_p(k) \right] \qquad \text{(III.78)}$$

Da dieser Ausdruck sicherlich für ein unendliches System unendlich ist, ist hier nur die Größe $\mathcal{E} := E/N$, also die Bindungsenergie pro Nukleon von Interesse. Vollzieht man nun den Grenzübergang $N \longrightarrow \infty$, $\Omega \longrightarrow \infty$, so daß $\rho = \text{const}$, so ergibt sich mit den in Abschnitt IV.1 und IV.2 eingeführten Definitionen

$$\varepsilon = \frac{3}{10m} p_f^2 - \frac{3}{2 p_f^3} \int_0^{p_f} d\,p\, p^2 Z_p^2 \, \Delta_p \qquad (37)$$

$$- \frac{3}{2 p_f^3} \int_0^{p_f} d\,p\, p^2 \int_0^{\infty} d\,k\, k^2 \int_{-1}^{1} d\,x\, R\,(p,k,x)$$

Hierbei ist wiederum zu beachten, daß wegen der Nebenbedingung $|\vec{p} - \vec{k}| > p_f$ das Dreifachintegral ähnlich wie bei der Bestimmung des Energienenners $e_1(k)$ aus Gleichungen (19) - (21) aufspaltet in die drei Fälle $p_f \gg k$, $p_f < k < 2p_f$ und $k \gg 2p_f$.

Nach erfolgter Lösung der R-Gleichung läßt sich also nach Gleichung (37) die Bindungsenergie bestimmen, deren Verhalten im nächsten Kapitel in Abhängigkeit von der Dichte, d.h., des Fermi-Impulses p_f und unter Veränderung der drei Parameter μ, g und Λ diskutiert werden soll.

V. Ergebnisse der numerischen Rechnungen

1. Vorbemerkungen

Wie bereits in Kap. IV.2 erwähnt wurde, ist zur Lösung von Gleichung (IV.28) zunächst ein Gauß'sches Iterationsverfahren der Form

$$R^{(n)} = f\left(R^{(n-1)}\right) \tag{1}$$

verwandt worden /38/. Wegen der relativ hohen Anzahl der nötigen Stützpunkte ($n_p \times n_k \times n_x = 33 \times 51 \times 9$) operiert man hierbei jedoch bereits am Rande der verfügbaren Speicherkapazität. Es schien daher angebracht, eine Abwandlung dieses Verfahrens nach Seidel /39/ einzuführen. Diese basiert auf der Idee, die innerhalb einer Iteration gewonnenen Funktionswerte bereits zur Berechnung der Integrale heranzuziehen. D.h. also

$$R^{(n)}(p_j, k_j, x_l) = f\left(R^{(n)}(p_{j'}, k_{j'}, x_{l'}), R^{(n-1)}(p_{j''}, k_{j''}, x_{l''})\right) \tag{2}$$

mit $$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ l' \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} i \\ j \\ l \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} i'' \\ j'' \\ l'' \end{pmatrix}$$

Dieses Verfahren besitzt den technischen Vorteil, daß man den Funktionswerten $R^{(n)}$ und $R^{(n-1)}$ den gleichen Speicherplatz zuweisen kann. Ohne diese Möglichkeit wäre die Berechnung der Zweiteilchen-Einflüsse nicht programmierbar.

Die Rechnungen haben nun gezeigt, daß durch diese Vorgehensweise auch das Konvergenzverhalten des Verfahrens wesentlich verbessert wird. So führt die in Anhang B.2 dargestellte "Konvergenzbeschleunigung" bereits nach der zweiten Anwendung zu einer relativen Genauigkeit von 10^{-6} in der Bindungsenergie.

In den folgenden Abschnitten sollen nun die mit diesem Verfahren gewonnenen Ergebnisse dargestellt werden. Eine abschließende Diskussion findet sich dann in Kapitel VI.

2. Ergebnisse aus der "reinen" R-Gleichung

Zunächst sollen hier die Ergebnisse der "reinen" R-Gleichung, d.h., ohne Berücksichtigung der Zweiteilchen-Effekte aufgezeigt werden.

Da im folgenden als interessante Größe der Bindungsenergie in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls p_f mit der Kopplungskonstante g, der Bosonenmasse μ und dem cut-off-Parameter Λ als freien Parametern diskutiert werden soll, sei an dieser Stelle kurz auf die Struktur der Funktion R(p, k, x) eingegangen, deren Kenntnis ja zur Berechnung der Bindungsenergie genügt.

Wie schon früher erwähnt, ist die Abhängigkeit dieser Funktion in p- und x-Richtung streng linear. Bezüglich der Skala, innerhalb der R insgesamt variiert, ist die Funktion sogar nahezu konstant.

Dies ist auf die Verwendung einer geschwindigkeitsunabhängigen Wechselwirkung zurückzuführen, deren Eigenschaft (W = f(k)) sich hier wiederspiegelt.

In Abb. 10 und 11 ist die Funktion R(p, k, x) gegen p und in Abb. 12 und 13 gegen x für jeweils zwei konstante Variablenpaare (k, x) bzw. (p, k) aufgetragen. Als Parametersatz wurden hier die Standard-Größen (s. a. Abschnitt IV.1), also

$$\begin{aligned} g &= 13.22 \\ \Lambda^2 &= 1.1\,\mathrm{GeV}^2 \\ \mu &= 139.57\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \qquad (3)$$

verwandt.

ZUR STRUKTUR DER FUNKTION R(p,K,x)

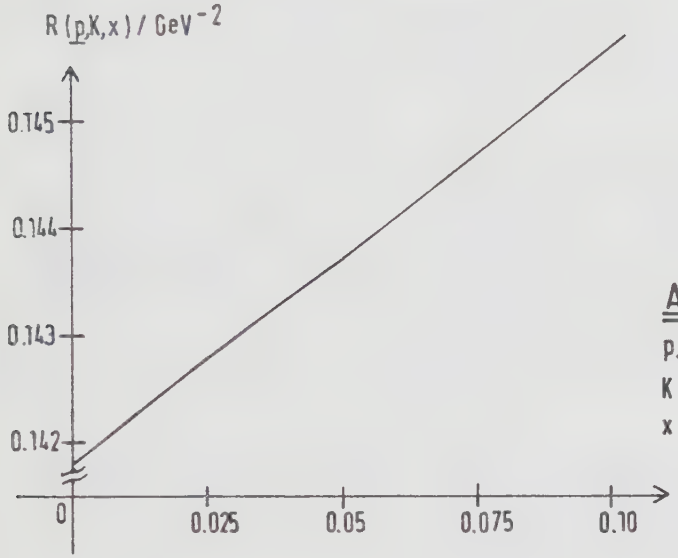


Abb. 10:

p_f = 0.1 fm^{-1}
K = 5 fm^{-1}
x = 0

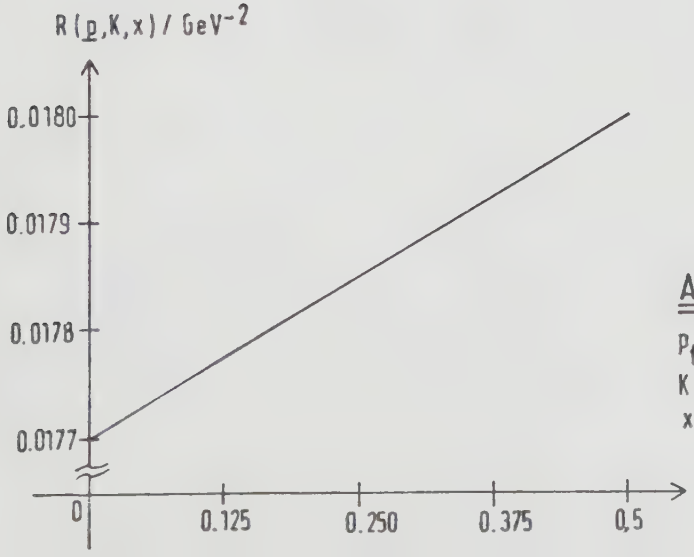


Abb. 11:

p_f = 0.5 fm^{-1}
K = 10 fm^{-1}
x = -1

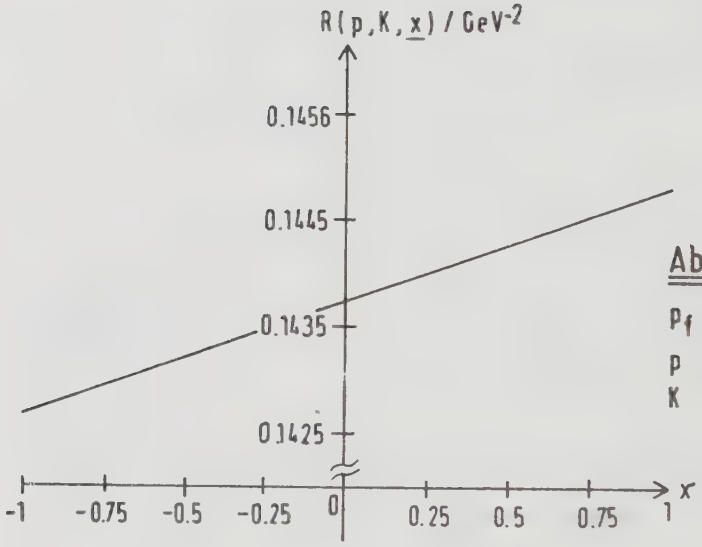


Abb. 12:

p_f = 0.1 fm^{-1}
p = 0.05 fm^{-1}
K = 5 fm^{-1}

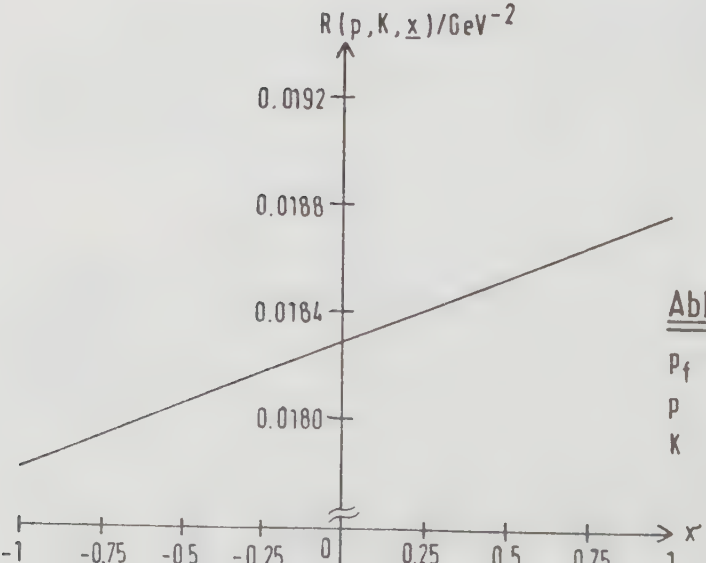


Abb. 13:

p_f = 0.5 fm^{-1}
p = 0.25 fm^{-1}
K = 10 fm^{-1}

Das hier gezeigte Verhalten der Funktion ist auch als Hinweis dafür zu sehen, daß die in Abschnitt IV.3 und Anhang B angeführte Approximation der Integrale über p und x durch ihre Mittelwerte im Rahmen der Rechengenauigkeit sehr gut ist.

Da die analytische Form der Funktion R jedoch nicht angebbar ist, und da die Hinzunahme des S_{11} - Terms (IV.33 bzw. IV.34) diese Struktur zerstören könnte, läßt sich ein geschlossener Beweis für die Richtigkeit der Annahme (IV.36) nicht führen. Jedoch kann die Tatsache, daß selbst die Hinzunahme des genäherten S_{11} - Terms die Struktur von R erhält, als Bestätigung für die Güte dieser Näherung gewertet werden.

Eine kompliziertere Struktur besitzt die Funktion R lediglich in k-Richtung. Zur Darstellung seien zwei feste Ordinatenpaare (p, x) herausgegriffen. Abb. 14 stellt dann die Funktion R in Abhängigkeit von k mit den Standard-Größen (3) als Parameter dar. Eine Untersuchung der verschiedensten Sätze (p, k) zeigte zusätzlich, daß die Lage des Maximums sich nicht ändert.

Es ändern sich lediglich die Funktionswerte an dieser Stelle.

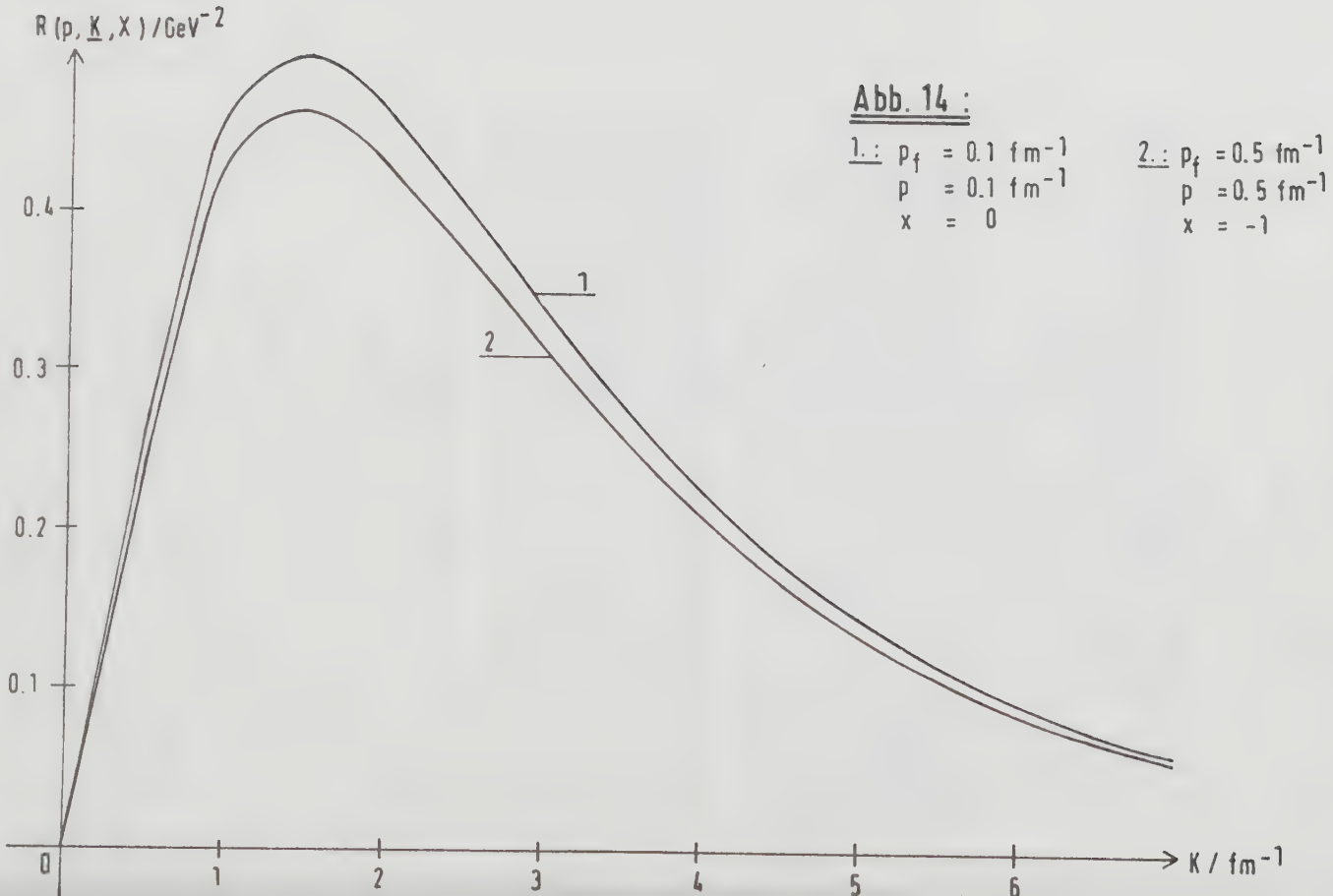


Abb. 14 :

1.: p_f = 0.1 fm^{-1}
p = 0.1 fm^{-1}
x = 0

2.: p_f = 0.5 fm^{-1}
p = 0.5 fm^{-1}
x = -1

Diese kurze Diskussion soll genügen, um die Struktur der Funktion R(p, k, x) zu erläutern. Die eigentlich interessante Größe dieser Theorie ist die Bindungsenergie pro Fermion. Diese läßt sich bei Kenntnis von R nach Gleichung (IV.37) bestimmen.

Betrachtet man z.B. das Diagramm 15, in dem der Verlauf der Bindungsenergie gegen den Fermi-Impuls p_f d.h. also gegen die Dichte aufgetragen ist, so erkennt man, daß diese Kurve für $p_f \to o$ mit der Steigung $\sim o$ gegen einen festen, minimalen Wert geht. Dieser Wert ist je nach gewähltem Parametersatz g, μ, Λ positiv oder negativ. Hieraus läßt sich schließen, daß die R-Gleichung ohne Hinzunahme der Zweiteilchen-Korrelationen zwar Bindungszustände liefert, das System in diesen Zuständen jedoch nicht stabil ist, sondern in Richtung des Minimums, also in Richtung $\rho = 0$ zerfällt. Dies ist weiter nicht verwunderlich, da ja, wie bereits erwähnt, die reine R-Gleichung lediglich die RPA-Effekte berücksichtigt, die bei stark wechselwirkenden Systemen nur einen sehr geringen Anteil ausmachen. Wie im Abschnitt V.3 noch diskutiert werden wird, liefert die Berücksichtigung der Zwei-Teilcheneffekte dann tatsächlich stabile Bindungszustände.

Zunächst sollen nun die Ergebnisse der reinen R-Gleichung aufgezeigt werden, die bei der Variation der Mesonenmasse erzielt wurden. Abb. 15 zeigt den Verlauf der Bindungsenergie in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls p_f für den Standard-Parametersatz (3). Abb. 16 stellt diese Funktion für drei typische Werte der Mesonenmasse, nämlich 10 MeV, 250 MeV und 750 MeV dar. In Abb. 17 ist der Verlauf des Nulldurchgangs dieser Kurve (absolutes und lokales Minimum) in Abhängigkeit von der Mesonenmasse dargestellt. Die entsprechenden numerischen Werte sind aus den nachstehenden Tabellen ersichtlich.

Tab. 2: Bindungsenergie pro Fermion (in MeV) für verschiedene Mesonenmassen

p_f/fm^{-1} \ μ/Mev	139.57	1o	25o	75o
0	-3.69o	-4.o5o	-3.233	- .6154
.o2	-3.684	-4.o45	-3.228	- .61o3
.o4	-3.67o	-4.o3o	-3.213	- .595[illegible]1
.o6	-3.644	-4.oo5	-3.188	- .5697
.o8	-3.6o8	-3.97o	-3.152	- .5341
.1o	-3.563	-3.924	-3.1o7	- .4884
.15	-3.373	-3.765	-2.949	- .3296
.2o	-3.183	-3.536	-2.727	- .1o73
.25	-3.oo7	-3.243	-2.442	.1783
.3o	-2.549	-2.883	-2.o94	.5275
.41	-1.657	-1.964	-1.2o8	1.416
.51	- .492	- .755	- .o58	2.561
.76	3.641	3.525	3.992	6.544

Tab. 3.: Abhängigkeit der Bindungsenergie für $\rho_f \to 0$ von der Mesonenmasse

μ/MeV	ε/MeV
1o	-4.05o
4o	-4.ooo
7o	-3.923
1oo	-3.83o
139.57	-3.69o
17o	-3.571
25o	-3.233
5oo	-2.o23
75o	- .615
1ooo	.982

Abb. 15: VERLAUF DER BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI $\mu = 139.57$ MeV, $g = 13.22$, $\Lambda^2 = 1.1$ GeV^2

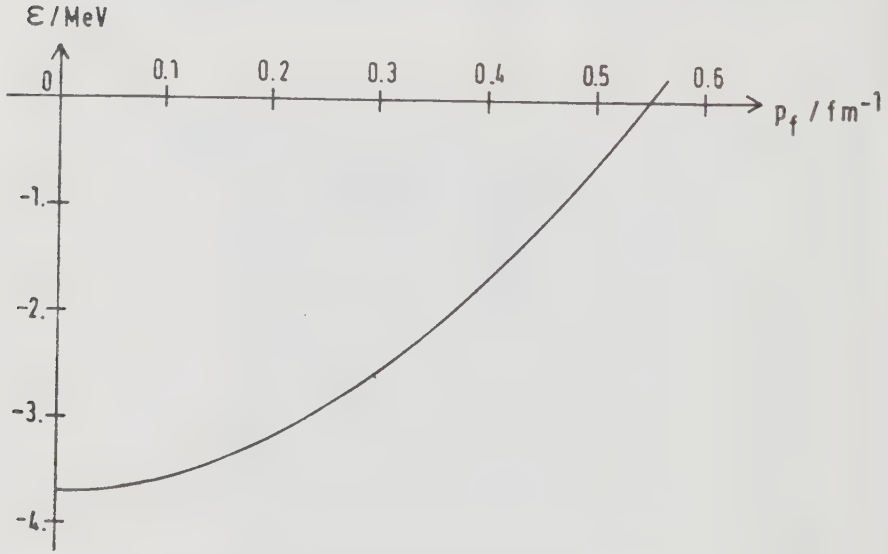


Abb. 16: DITO BEI $g = 13.22$, $\Lambda^2 = 1.1$ GeV^2,
$\mu = 10$ MeV (I), $\mu = 250$ MeV (II), $\mu = 750$ MeV (III)

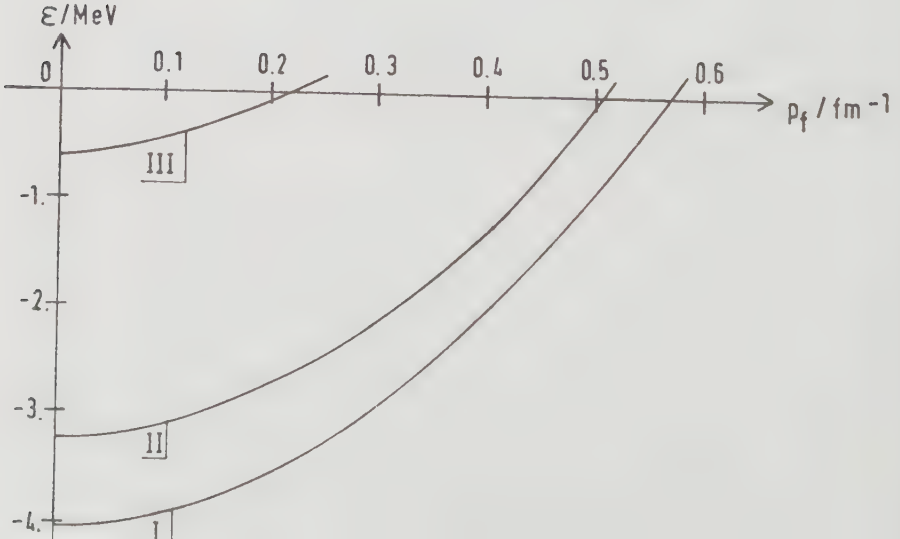
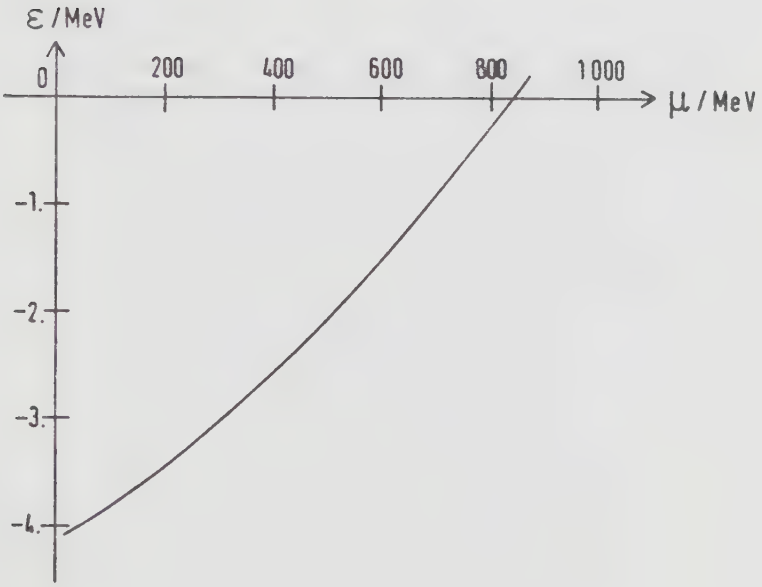


Abb. 17: BINDUNGSENERGIE PRO FERMION FÜR $p_f \to 0$ BEI $g = 13.22$, $\Lambda^2 = 1.1\ \mathrm{GeV}^2$



Als nächstes wurde bei festem μ (= 139.57 MeV) und Λ^2 (= 1.1GeV^2) die Kopplungskonstante g variiert. Abb. 18 zeigt die Energiekurven für drei typische Werte von g. Ab g $\approx$ 25 konnte bei dem hier verwendeten Verfahren keine Konvergenz mehr erzielt werden. Dies muß jedoch nicht heißen, daß es keine Lösungen mehr gibt. Sie sind jedoch iterativ nicht mehr zu erreichen. Abb. 19 stellt die Bindungsenergie pro Fermion für $p_f \to 0$ in Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten dar. Die entsprechenden numerischen Werte finden sich in den Tabellen 4 und 5.

Tab.: 4 Bindungsenergie pro Fermion (in MeV) für verschiedene Kopplungskonstanten

p_f/fm^{-1} \ g	13.0	15.0	17.5
0	-1.233	-26.109	-68.51+
.02	-1.228	-26.104	-68.509
.04	-1.212	-26.089	-68.49+
.06	-1.187	-26.064	-68.470
.08	-1.152	-26.029	-68.436
.10	-1.106	-25.984	-68.392
.15	- .948	-25.827	-68.2+1
.20	- .726	-25.608	-68.2+
.25	- .441	-25.326	-67.75?
.30	- .091	-24.981	-67.42?
.41	.8?1	-24.1.1	-66.?3-
.51	1.??	-22.??	-6?.?1
.76	6.1 +	-13.36+	-?1.??

Tab.: 5 Abhängigkeit der Bindungsenergie für $\rho_f \to 0$ von der Kopplungskonstanten

g	ε/Mev
12.5	4.129
13.0	-1.233
13.22	-3.690
14.0	-12.921
15	-26.109
17.5	-68.514
20.0	-138.47
25.0	-2062.0

Abb. 18: BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI μ = 139.57 MeV, Λ^2 = 1.1 GeV^2, g = 13 (I), 15 (II), 17.5 (III)

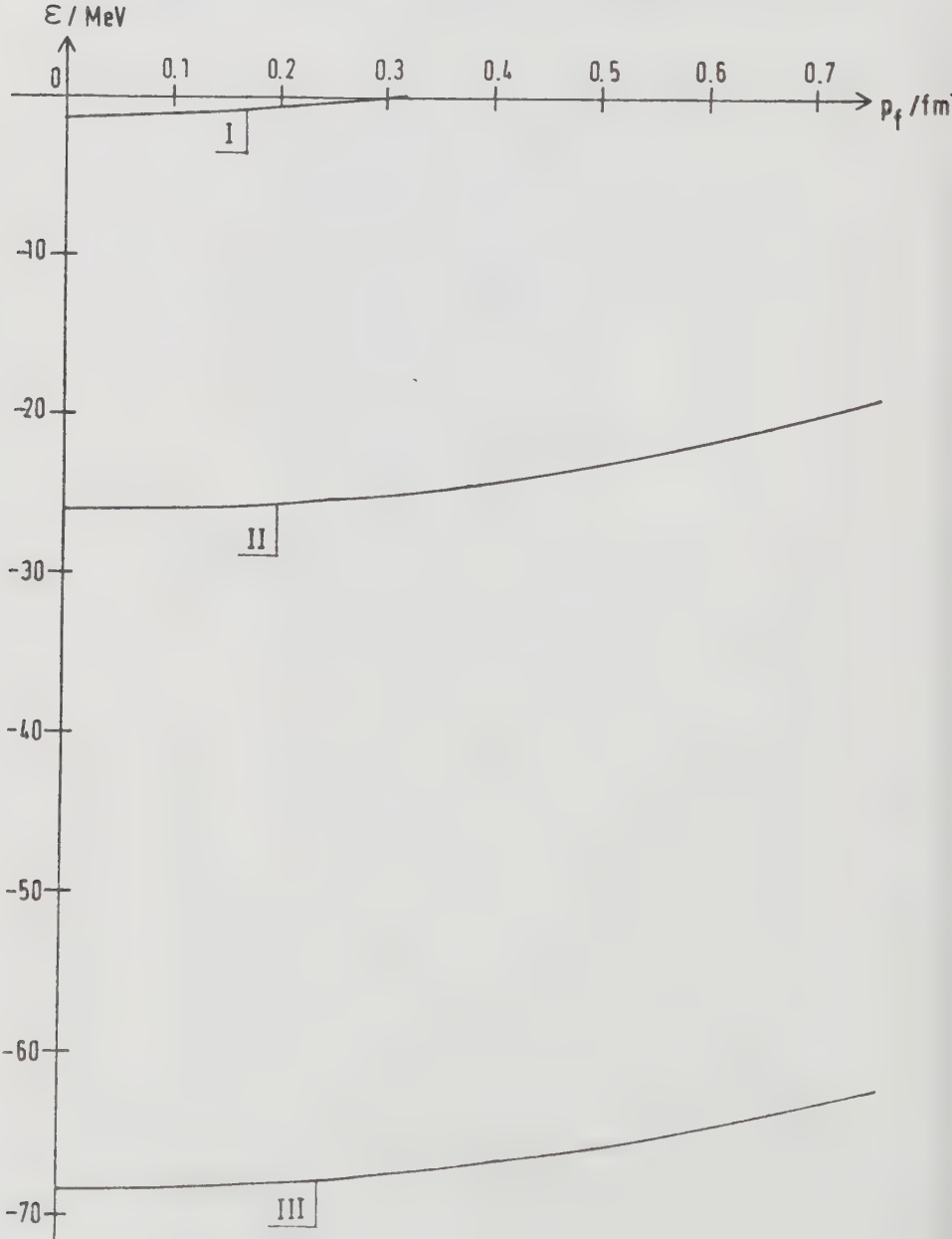
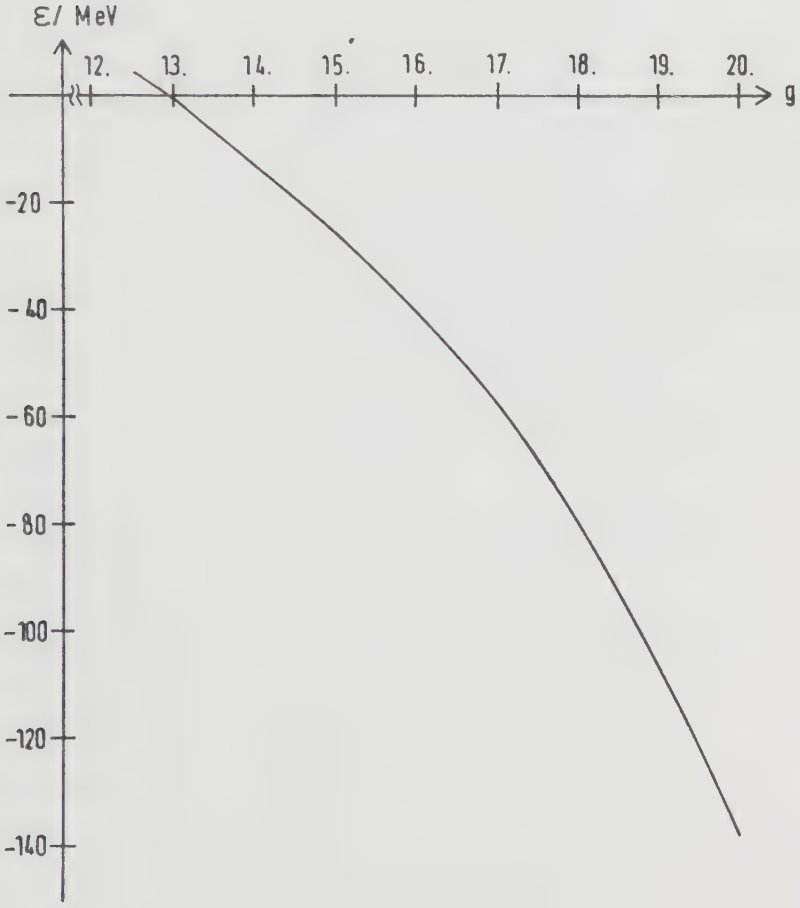


Abb.19 : BINDUNGSENERGIE PRO FERMION FÜR $p_f \to 0$ BEI
$\mu = 139.57$ MeV , $\Lambda^2 = 1.1\,\mathrm{GeV}^2$



Wie hier zu sehen ist, bewirkt eine Änderung der Kopplungskonstanten eine weitaus stärkere Änderung der Bindungsenergie als die Änderung der Bosonenmasse, was auch nicht weiter verwunderlich ist, da ja die Stärke der Kopplung stärker in die Bindungsenergie eingeht als die Reichweite. Einenähnlich starken Einfluß auf die Bindungsenergie besitzt der Cut-off-Parameter Λ , der für die räumliche Ausdehnung der Boson-Fermion Wechselwirkung verantwortlich ist. In Abb. 2o ist die Bindungsenergie-Kurve wieder für drei typische Fälle aufgetragen. Abb. 21 zeigt dagegen die Abhängigkeit der Bindungsenergie für $p_f \to 0$ vom Cut-off-Parameter Λ . In den folgenden Tabellen sind wiederum die entsprechenden numerischen Werte eingetragen.

Tab.: 6 Bindungsenergie pro Fermion (in MeV) für verschiedene Cut-off-Parameter

p_f/fm^{-1} \ Λ/GeV	1.05	1.3o	1.5o
0	-3.69o	-97.843	-233.37
.o2	-3.684	-97.838	-233.36
.o4	-3.67o	-97.823	-233.35
.o6	-3.644	-97.798	-233.33
.o8	-3.6o8	-97.764	-233.3o
.1o	-3.563	-97.72o	-233.25
.15	-3.373	-97.567	-233.12
.2o	-3.183	-97.352	-232.92
.25	-3.oo7	-97.o77	-232.67
.3o	-2.549	-96.74o	-232.34
.41	-1.657	-95.882	-231.53
.51	- .492	-94.76o	-230.5
.7e	[illegible].841	-85.233	-227.o5

Tab.: 7 Bindungsenergie für $p_f \to 0$

Λ/GeV	ε/MeV
1.0	8.005
1.05	- 3.690
1.2	- 52.447
1.3	- 97.843
1.4	-156.93
1.5	-233.37

Abb. 20 : BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI $g = 13.22$, $\mu = 139.57$ MeV, $\Lambda = 1.05$ MeV (I), $\Lambda = 1.3$ MeV (II), $\Lambda = 1.5$ MeV (I

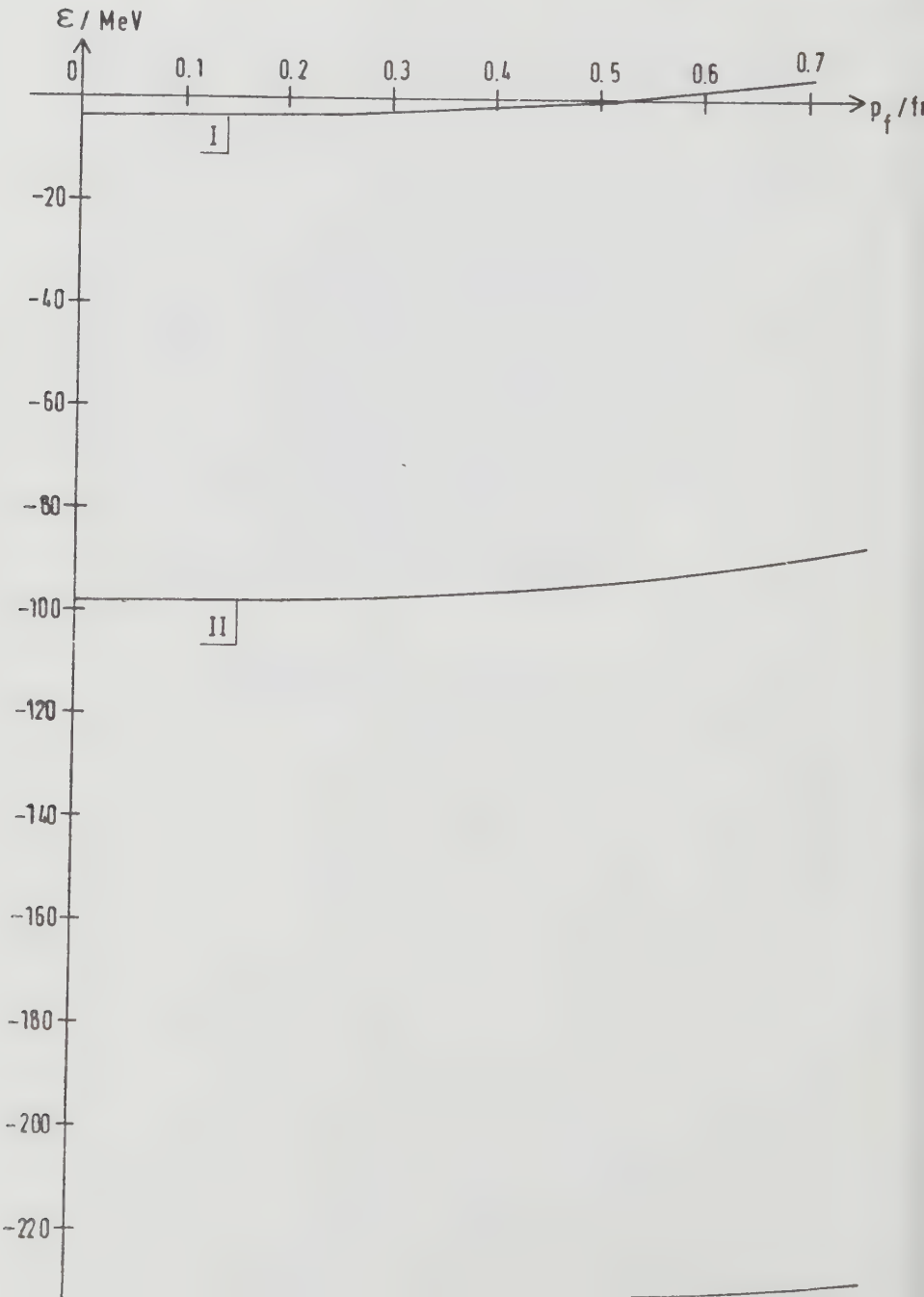
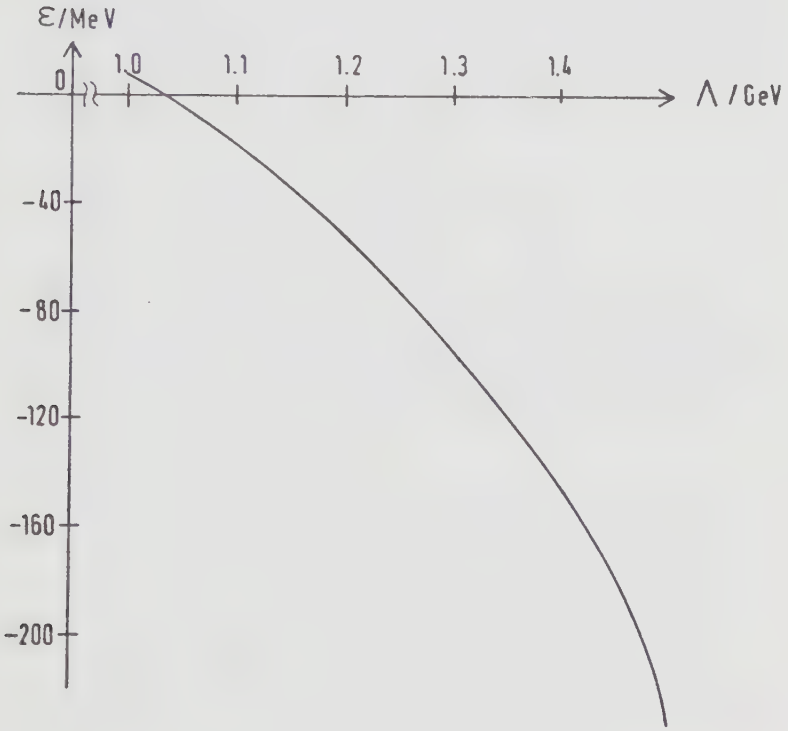


Abb. 21 : BINDUNGSENERGIE PRO FERMION FÜR $p_f \to 0$
BEI μ = 139.57 MeV , g = 13.22



Wie man an den hier dargestellten Ergebnissen sehen kann, gibt es für jeden der drei Parameter einen minimalen bzw. maximalen Wert, von dem ab keine Bindungszustände mehr existieren. Ohne Berücksichtigung der Zweiteilchen-Korrelationen sind dies die Größen:

$$\mu \approx 850\,\text{MeV}$$

$$g \approx 13$$

$$\Lambda \approx 1.05\,\text{GeV}$$

Die gleichen Untersuchungen sollen im nächsten Abschnitt für die R-Gleichung unter Hinzunahme des S_{11} - Terms durchgeführt werden.

3. Effekte der Zweiteilchen-Korrelationen

Da, wie bereits im zweiten Abschnitt dieses Kapitels erwähnt wurde, die Funktion $R(p, k, x)$ sich durch die Berücksichtigung der Zweiteilchen-Korrelationen strukturell nicht ändert, soll hier auf eine erneute Darstellung der Funktion verzichtet werden.

Eine grundsätzliche Änderung erfährt hier jedoch die Bindungsenergiekurve in Abhängigkeit von der Dichte. Im Gegensatz zu den Ergebnissen der reinen R-Gleichung bildet sich hier ein Minimum aus, welches gleichbedeutend mit der Aussage ist, daß zu jedem Parametersatz ein stabiler Zustand gehört. Zwar liegt dieser Zustand nicht im Bereich nuklearer Dichten, aber dies ist wohl auch bei der Realitätsferne des Lee-Modells nicht anders zu erwarten.

In Abb. 22 ist zunächst die Bindungsenergie als Funktion des Fermi-Impulses p_f für den Standardparametersatz (3) dargestellt. Zum besseren Vergleich ist hier die Kurve noch einmal in dem gleichen Bereich wie in Abb. 15 zusammen mit der Standard-Kurve aus der reinen R-Gleichung aufgezeichnet. Abb. 23 zeigt dann den eigentlich interessanten Bereich des Minimums der Funktion. Die entsprechenden Zahlenwerte finden sich in Tab. 8.

Abb. 22 : VERLAUF DER BINDUNGSENERGIE PRO FERMION FÜR DEN STANDARD - PARAMETERSATZ

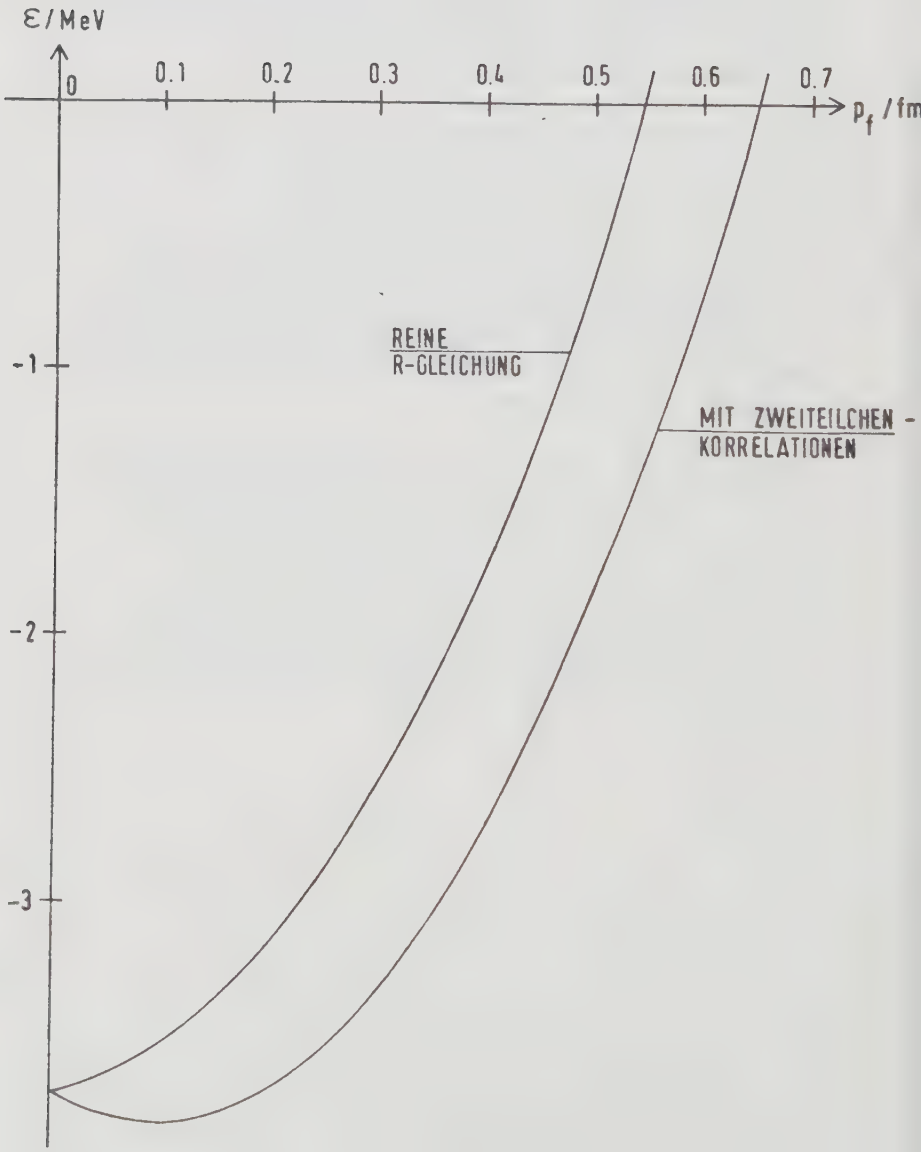
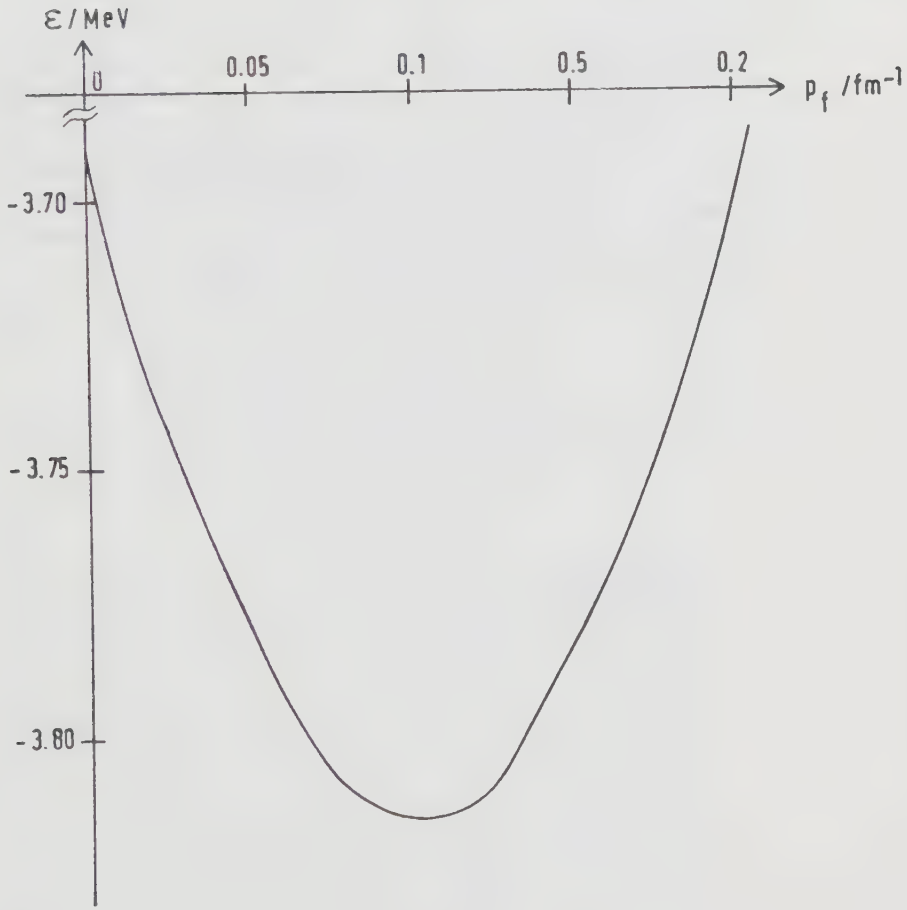


Abb. 23 : VERLAUF DER BINDUNGSENERGIE PRO FERMION FÜR DEN STANDARD-PARAMETERSATZ (AUSSCHNITT)



Nun soll die in Abb. 23 dargestellte Funktion ebenso wie im zweiten Abschnitt auf ihr Verhalten in Abhängigkeit von einer Veränderung der Parameter μ, g und Λ diskutiert werden. Als erstes wurde wieder die Mesonenmasse μ variiert. In Abb. 24 ist die Bindungsenergie pro Fermion zunächst wieder für drei typische Werte von μ aufgetragen. Abb. 25 zeigt dann die Veränderung der Lage des Miniums in Abhängigkeit von μ. Da sich hier sowohl die Ordinate als auch die Abszisse ändert, wurde eine andere Darstellungsart als im zweiten Abschnitt gewählt. Die entsprechenden numerischen Werte finden sich ebenso wie die Werte für den Standard-Parametersatz in den Tab. 8 und 9.

Tab. 8: Bindungsenergie pro Fermion (in MeV) für verschiedene Mesonenmassen

Pf/fm^{-1} \ μ/MeV	139.57	1o	2oo	6oo
0	-3.69o	-4.o51	-3.448	-1.48L
.o25	-3.744	-4.128	-3.492	-1.491
.o51	-3.783	-4.189	-3.521	-1.482
.o76	-3.8o7	-4.235	-3.533	-1.457
.1o1	-3.815	-4.266	-3.53o	-1.417
.127	-3.8o7	-4.281	-3.512	-1.361
.152	-3.784	-4.278	-3.477	-1.289
.17[illegible]	-3.744	-4.257	-3.427	-1.2o1
.2o3	-3.68o	-4.22o	-3.362	-1.1[illegible]

Tab. 9: Lage des Minimums der Bindungsenergie in Abhängigkeit von der Mesonenmasse

μ/MeV	p_f/fm-1	ε/MeV
1o	.135	-4.282
139.57	.1o1	-3.815
2oo	.o84	-3.534
4oo	.o44	-2.556
6oo	.o24	-1.491
75o	.o16	- .6184
9oo	.o11	.32o1

Abb. 24: BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI
$g = 13.22$, $\Lambda^2 = 1.1\ GeV^2$ UND
$\mu = 10$ MeV (I), $\mu = 200$ MeV (II); $\mu = 600$ MeV (III)

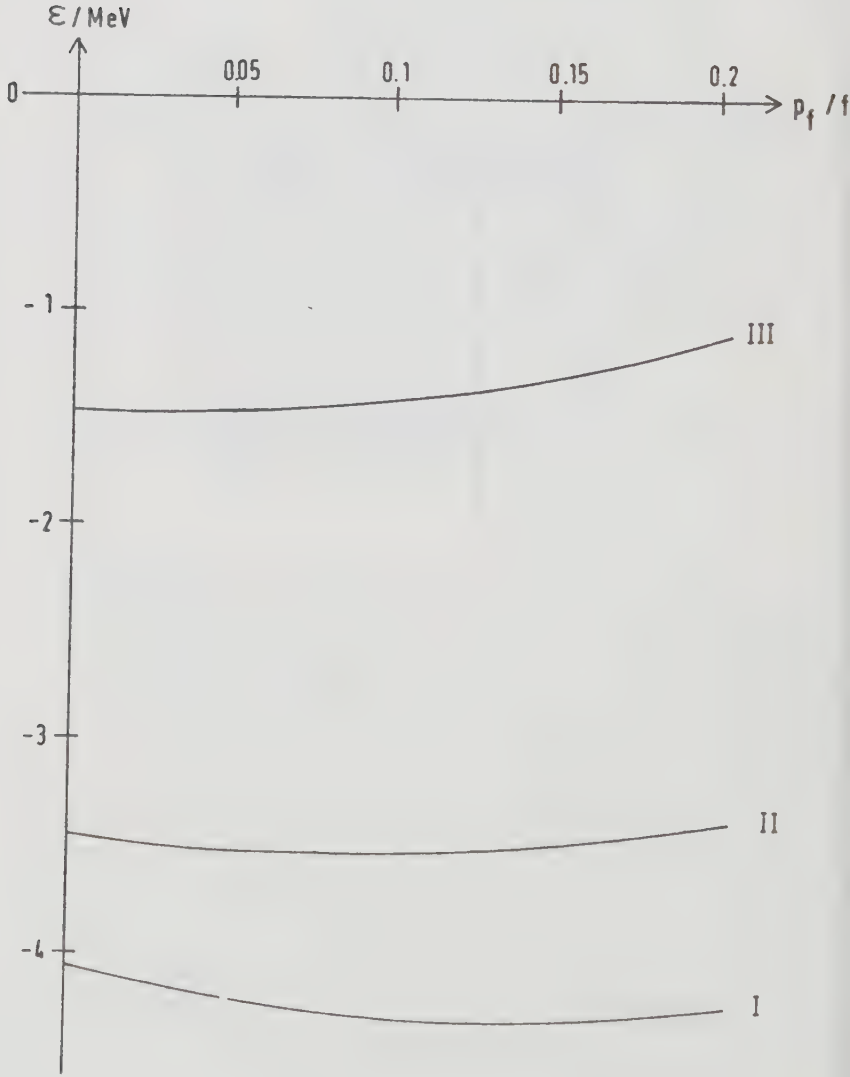
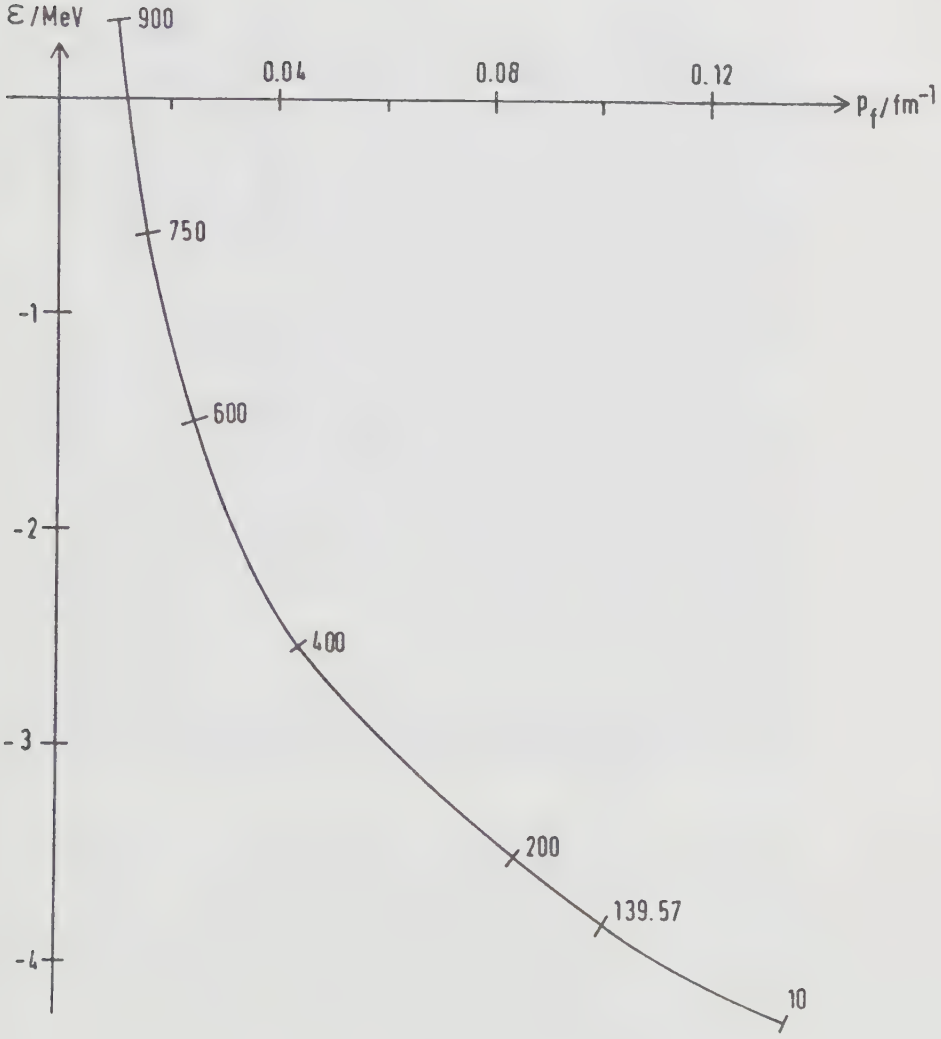


Abb. 25: LAGE DES MINIMUMS DER BINDUNGSENERGIE BEI VERSCHIEDENEN BOSONENMASSEN. (DIE ZAHLENWERTE AN DER KURVE SIND DIE BOSONENMASSEN μ IN MeV)



An Abb. 24 und 25 läßt sich nun sehr gut der Einfluß der Reichweite der Wechselwirkung auf das System diskutieren. Obwohl ein quantitativer Zusammenhang zwischen Mesonenmasse und Reichweite nicht ohne weiteres angebbar ist, läßt sich feststellen, daß eine Erhöhung der Mesonenmasse den stabilen Zustand des Systems zu niedrigeren Dichten hin verschiebt. Außerdem wird das Minimum weniger ausgeprägt, schließlich existieren bei einer Mesonenmasse in der Größenordnung der Nukleonenmasse überhaupt keine Bindungszustände mehr, was gut mit den qualitativen Oberlegungen von Brown und Rho /4o/ übereinstimmt.

Als nächstes wurde nun wieder die Kopplungskonstante g verändert und das Verhalten des Systems in Abhängigkeit hiervon untersucht. Da die Änderungen der Bindungsenergie hier mehrere Größenordnungen durchlaufen, ist es nicht sinnvoll, mehrere Kurven in ein Diagramm zu zeichnen. Die strukturellen Veränderungen sind so klein gegen den Absolutbetrag der Bindungsenergie, daß die Lage des Minimums nicht mehr festzustellen wäre. Daher sind die Bindungsenergiekurven für drei typische Werte der Kopplungskonstanten in Abb. 26 - 28 dargestellt. Abb. 29 zeigt dann die Änderungen der Lage des Minimums bei einer Änderung von g. Die entsprechenden numerischen Werte sind den Tabellen 10 und 11 zu entnehmen.

Tab. 1o: Bindungsenergie pro Fermion (in MeV) für verschiedene Kopplungskonstanten g

p_f/fm^{-1} \ g	14	15	16
0	-12.922	-26.11o	-41.158
.o25	-12.991	-26.2o1	-41.277
.o51	-13.o44	-26.278	-41.382
.o76	-13.o83	-26.339	-41.471
.1o1	-13.1o6	-26.385	-41.547
.127	-13.113	-26.415	-41.6o5
.152	-13.1o5	-26.43o	-41.649
.177	-13.o8o	-26.43o	-41.678
.2o3	-13.o41	-26.414	-41.691
.3o4	-12.727	-26.197	-41.597
.4o5	-12.157	-25.73o	-41.256

Tab. 11: Lage des Minimums der Bindungsenergie in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante g

g	p_f/fm^{-1}	ε/MeV
12.5	.o82	4.o46
13.22	.1o1	-3.813
14	.126	-13.113
15	.165	-26.432
16	.212	-41.592
18	.3647	-8o.84o

Abb. 26: BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI
$\mu = 139.57$ MeV, $\Lambda^2 = 1.1$ GeV^2
$g = 14$

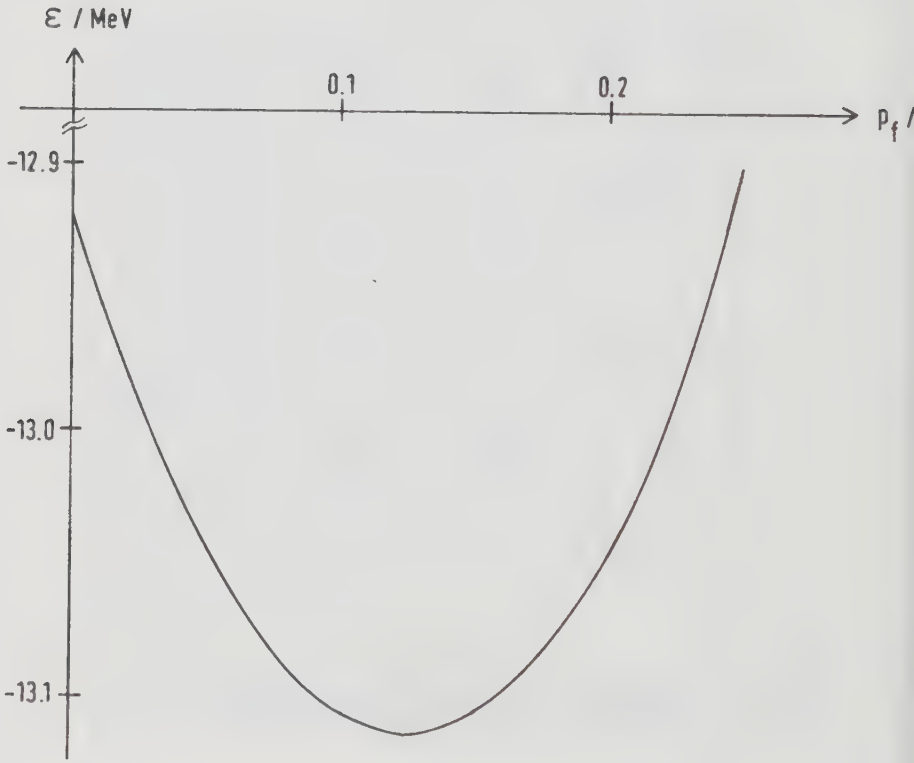


Abb. 27 : BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI
μ = 139.57 MeV , Λ^2 = 1.1 GeV^2
g = 15

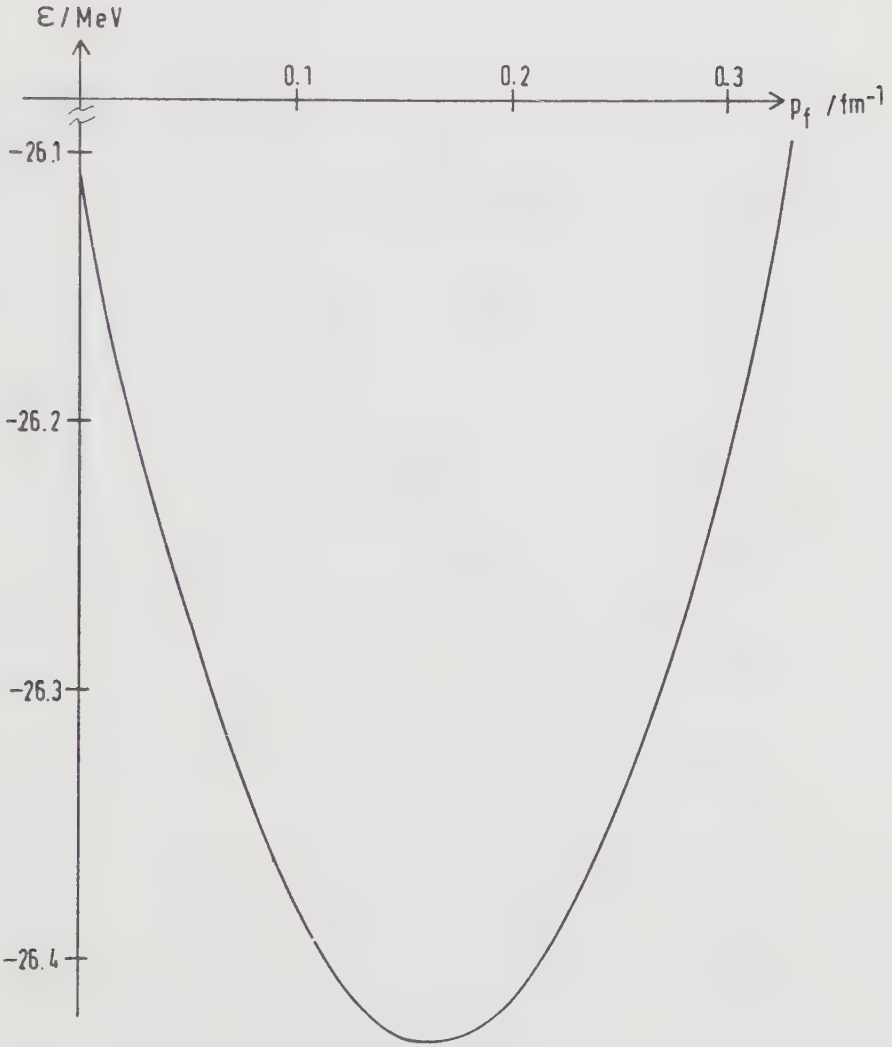


Abb. 28 : BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI
$\mu = 139.57$ MeV , $\Lambda^2 = 1.1$ GeV^2
$g = 16$

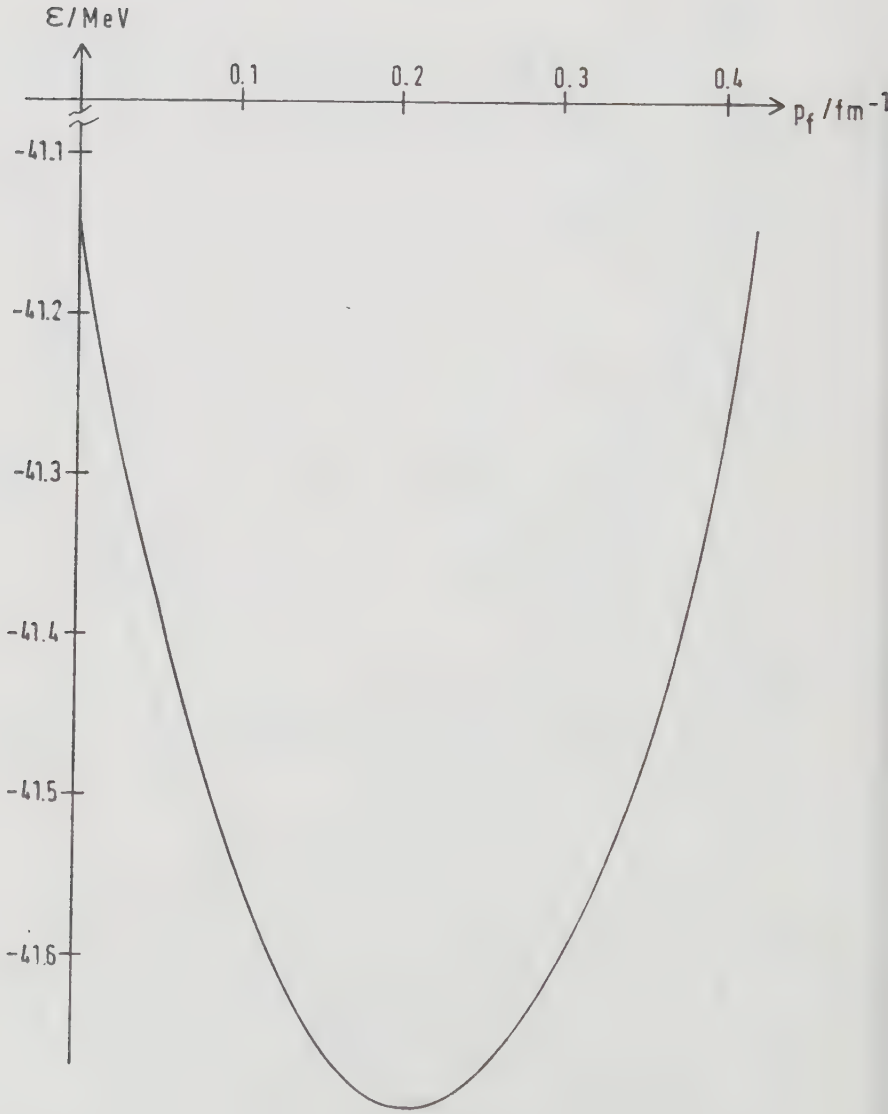
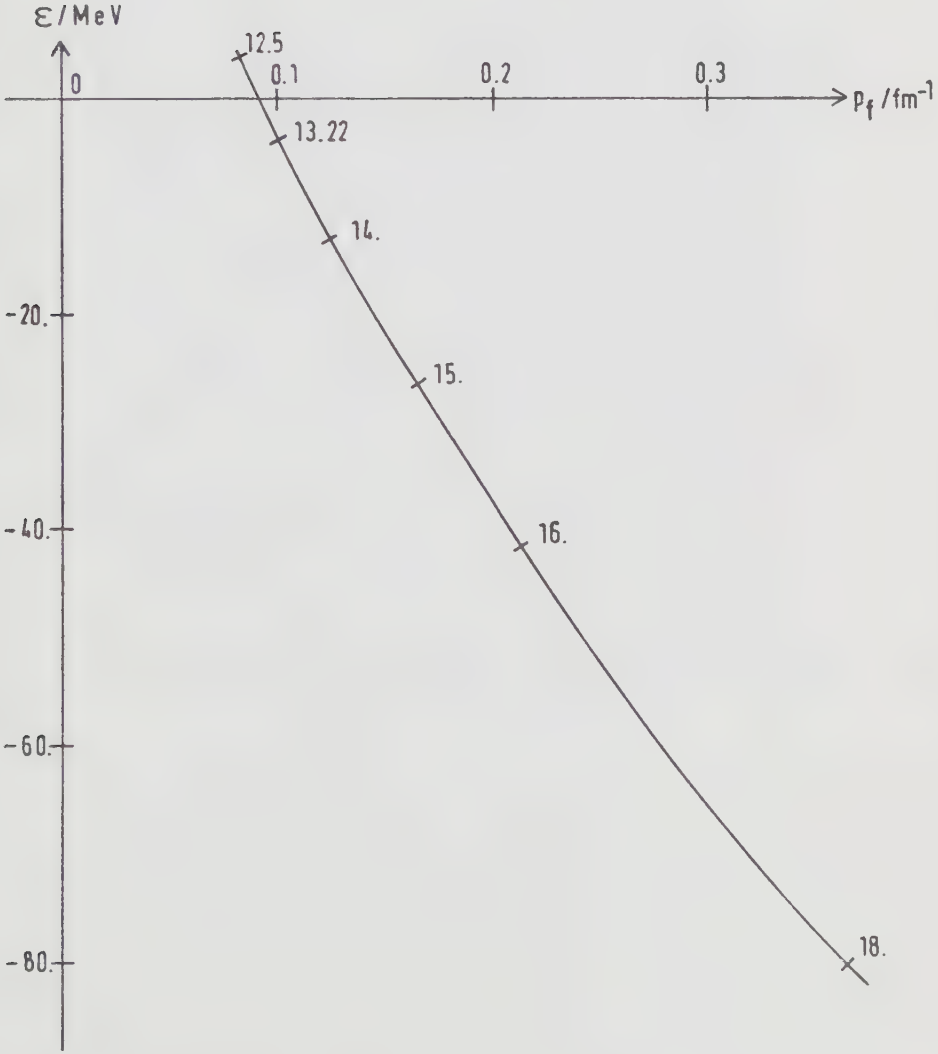


Abb. 29: LAGE DES MINIUMS DER BINDUNGSENERGIE BEI VERSCHIEDENEN KOPPLUNGSKONSTANTEN (DIE ZAHLEN AN DER KURVE SIND DIE WERTE DER KOPPLUNGS-KONSTANTEN g)



An diesen Abbildungen ist zu erkennen, daß das System auf eine Verstärkung der Kopplung zwar im Prinzip ähnlich reagiert wie auf eine Vergrößerung der Reichweite, jedoch ist die Skala, innerhalb derer die stabile Lage des Systems wandert, hier wesentlich größer.

Eine noch stärkere Reaktion erhält man, wenn man den Cut-off-Parameter Λ verändert. Dieser stellt ja, wie bereits des öfteren erwähnt, die räumliche Ausdehnung der Meson-Nukleon-Wechselwirkung dar. Drei typische Fälle sind hier wiederum in den Abbildungen 3o - 32 dargestellt,wohingegen Abb. 33 die Lageänderung des Minimums für verschiedene Werte von Λ darstellt. Hier erkennt man ein qualitativ völlig anderes Verhalten als in Abb. 25 und 29. Während dort die Steigung der Kurve bei wachsender Dichte immer weiter abnimmt, nimmt sie hier sehr stark zu. Auch ist hier der Bereich, in dem die Dichte variiert, verglichen mit Abb. 25 und 29 sehr klein. Da jedoch die Untersuchung des Systems für $\Lambda \rightarrow \infty$ wegen der dann auftretenden Inkonsistenzen (siehe Abschn. II.1 und II.4) im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgen kann, lassen sich hier keine weitergehenden Aussagen über dieses Verhalten machen.

Die entsprechenden Zahlenwerte für die Abb. 3o - 33 finden sich wiederum in den Tabellen 12 und 13.

Tab. 12: Bindungsenergie pro Fermion (in MeV) für verschiedene Cut-off-Parameter

p_f/fm^{-1} \ Λ/GeV	1.1	1.3	1.5
0	-17.911	-97.843	-233.37
.025	-17.968	-97.906	-233.43
.051	-18.010	-97.954	-233.47
.071	-18.037	-97.986	-233.50
.101	-18.048	-98.004	-233.52
.127	-18.043	-98.007	-233.53
.152	-18.023	-97.994	-233.52
.177	-17.987	-97.966	-233.49
.203	-17.935	-97.923	-233.46

Tab. 13: Lage des Minimums der Bindungsenergie in Abhängigkeit vom Cut-off-Parameter

Λ/GeV	p_f/fm^{-1}	$\mathcal{E}$/MeV
1.0	.097	7.89
1.05	.101	-3.813
1.1	.106	-18.048
1.2	.114	-52.602
1.3	.119	-98.008
1.4	.125	-157.10
1.5	.127	-233.53

Abb. 30: BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI
μ = 139.57 MeV g = 13.22
Λ = 1.1 GeV

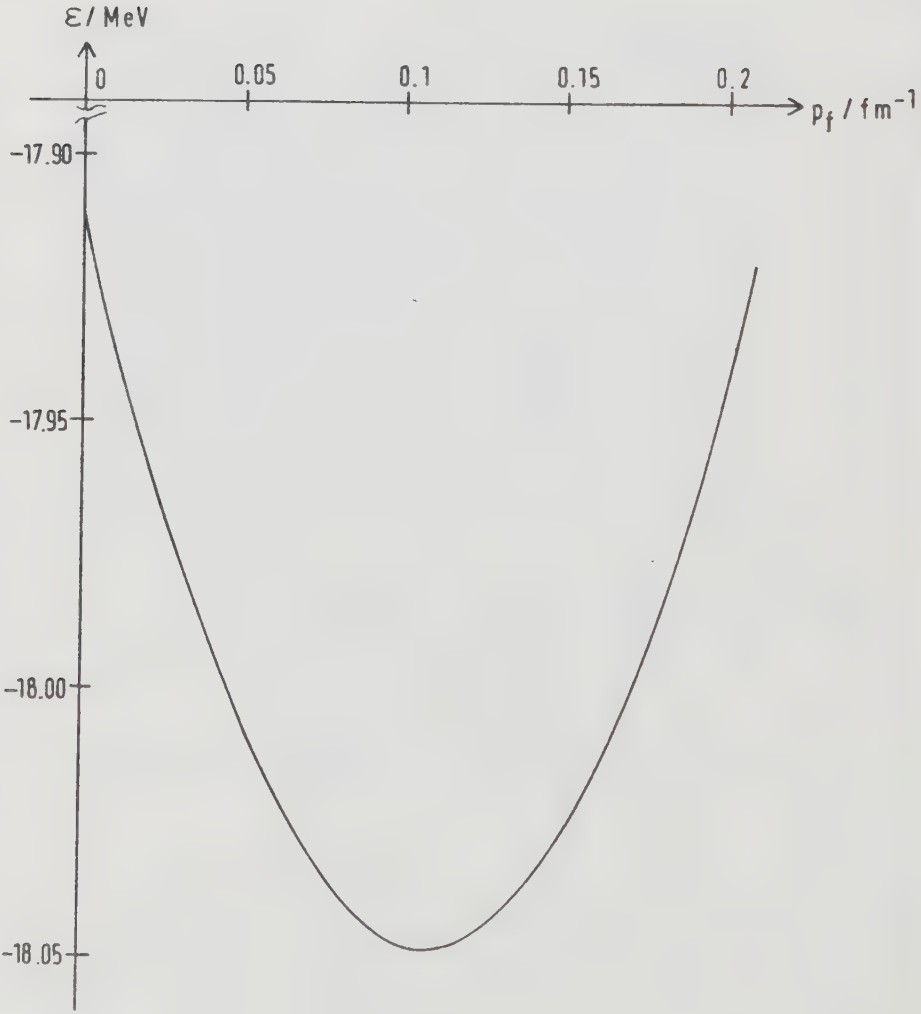


Abb. 31: BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI
μ = 139.57 MeV g = 13.22
Λ = 1.3 GeV

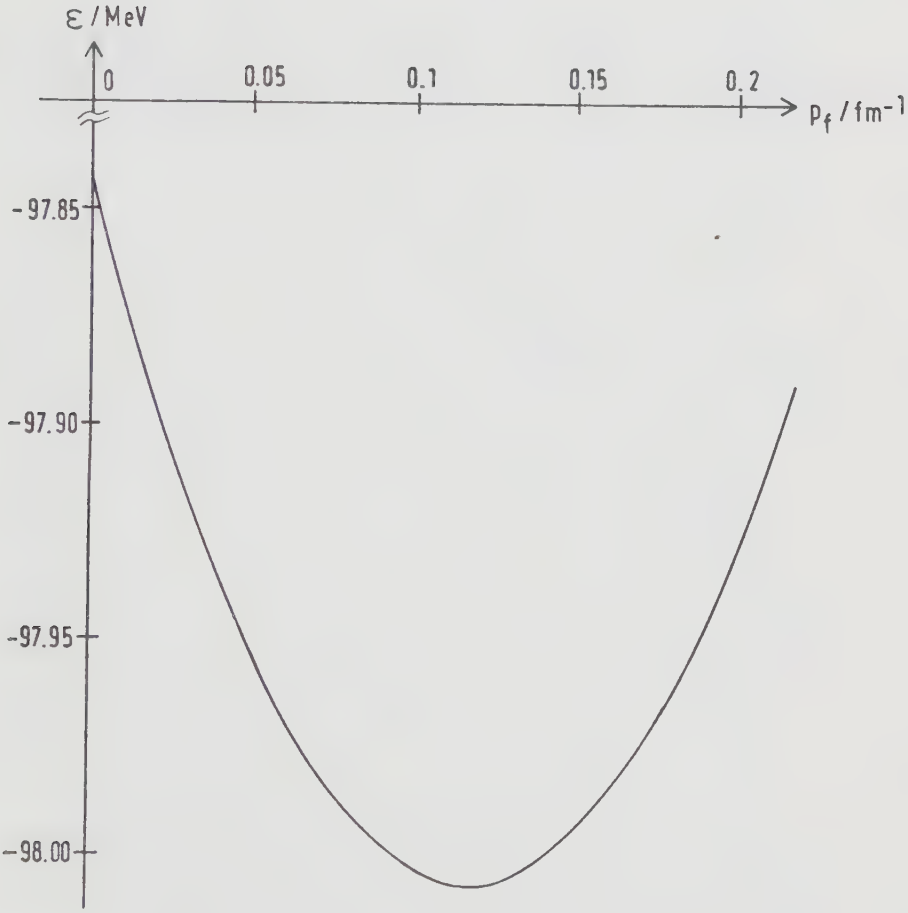


Abb. 32 : BINDUNGSENERGIE PRO FERMION BEI
μ = 139.57 MeV , g = 13.22
Λ = 1.5

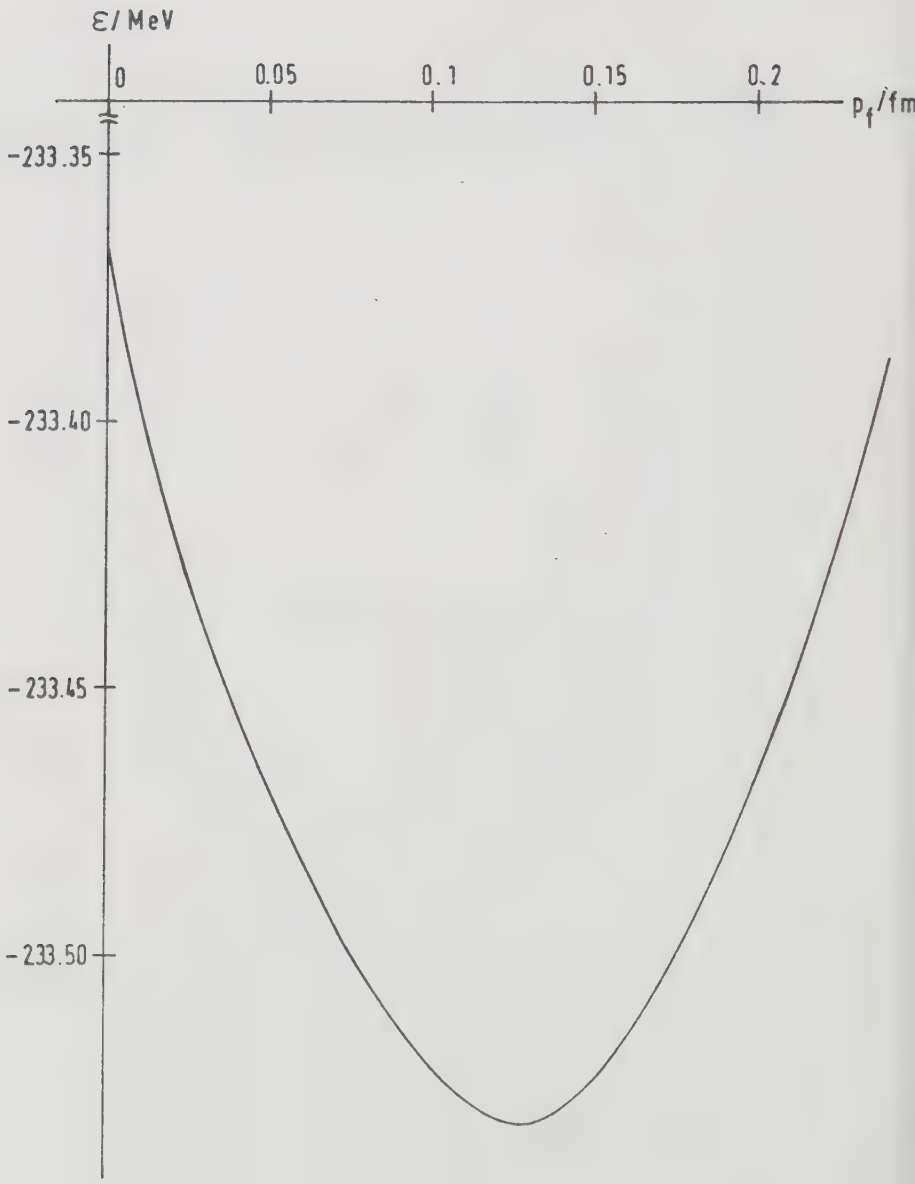
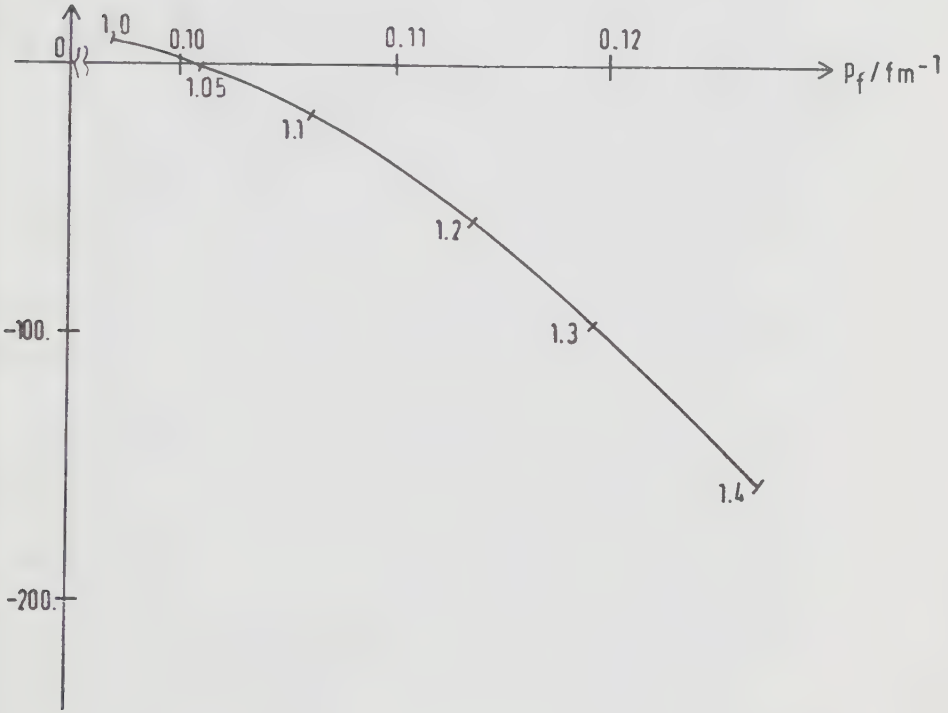


Abb. 33 : LAGE DES MINIMUMS DER BINDUNGSENERGIE BEI VERSCHIEDENEN CUT-OFF-PARAMETERN (DIE ZAHLENWERTE AN DER KURVE SIND DIE CUT-OFF-PARAMETER Λ IN GeV)



Auch hier läßt sich wie bei den Ergebnissen der reinen R-Gleichung ein Parametersatz angeben, jenseits dessen keine Bindungszustände mehr existieren. Und zwar sind diese Parameter die gleichen wie die in Abschnitt V.2 angegebenen. Das bedeutet, daß die Berücksichtigung der Zweiteilchen-Korrelationen keine Änderung in Bezug auf die Frage nach Bindungszuständen bei verschiedenen Parametern bewirkt. Diese führen also wohl zur Existenz von stabilen Bindungszuständen, ändern aber nichts am grundsätzlichen Verhalten des Systems bezüglich der Variation der Parameter.

VI. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßte sich mit der Untersuchung des Lee-Modells im Vielteilchen-Sektor. Im Rahmen der expS-Theorie ließ sich bei geeigneter Definition der Korrelations-Amplituden eine Hierarchie gekoppelter Integralgleichungen herleiten, welche zunächst noch die nackten, nichtrenormierten Parameter enthalten. Bei der Behandlung des Renormierungsprogrammes tritt zunächst zusätzlich zu den Einteilchen-Renormierungseffekten der Zwang zu einer "Korrelationsfunktionsrenormierung" auf. Die vollständige Renormierung wird jedoch nicht durch dieses formale Vorgehen erreicht. Es bleiben immer noch Ausdrücke in den Gleichungen, die sich als Reste aus der Renormierung deuten lassen. Erst nach der Kenntnis der Lösung der untersten Gleichung der expS-Hierarchie läßt sich das Renormierungsvorhaben vervollständigen. Hierbei ist - was bei Theorien mit phänomenologischen Potentialen als Problem nicht in Erscheinung tritt - eine saubere Trennung zwischen den Korrelationen eines Teilchens mit sich selbst und mit einem anderen Teilchen nicht vollständig möglich. Jedoch läßt sich eindeutig die Herkunft von Selbstenergie- und Vielteilchen-Effekten bestimmen und daher lassen sich bereits bei Kenntnis der einfachsten Korrelations-Amplituden exakte Aussagen zur Renormierung machen (vgl. II.4).

An der Struktur der Korrelations-Amplituden ist auffällig, daß sich die niedrigsten Amplituden als Vektor bzw. Tensor 2. Stufe im Impulsraum darstellen lassen. Gerade diese Darstellung hat dann eine sehr einfache Form der Gleichungen zur Folge. Desweiteren lassen sich die Fragen nach Eindeutigkeit der Lösungen exakt beantworten. Außer-

dem läßt sich die Zweiteilchen-Gleichung bei erfolgter Lösung der Einteilchen-Gleichung analytisch lösen. Somit lassen sich also Ein- und Zweiteilchen-Gleichungen zu einer nicht-linearen Integralgleichung zusammenfassen, die dann z.B. iterativ lösbar ist.

Nach erfolgter Lösung dieser Gleichung wurde dann die Bindungsenergie des Systems in Abhängigkeit von der Dichte untersucht. Eine Veränderung der Reichweite der Wechselwirkung wurde durch Variation des Verhältnisses der Bosonenmasse zur Fermionenmasse simuliert. Hier zeigte sich, daß sich bei Verringerung der Reichweite der stabile Zustand sowohl zu geringeren Dichten als auch zu kleineren Energien hin verschiebt. Dies ist zu verstehen durch die Konstanz des kinetischen Energieanteils bezüglich der Bosonenmasse, welcher dann auch bei einem Verhältnis Bosonen- zu Fermionenmasse von ungefähr eins überwiegt und keine gebundenen Zustände mehr zuläßt. Jedoch ist die Abhängigkeit des Systems von der Reichweite durchaus gering, vergleicht man sie mit der Abhängigkeit von der Stärke bzw. der Ausdehnung der Kopplung.

Die Variation der Kopplungskonstanten zeigte hier eine wesentlich empfindlichere Reaktion. Bereits bei einem Wert unterhalb von ungefähr 13 existiert kein gebundener Zustand mehr. Die Bindungsenergie durchläuft jedoch ebenso wie die Dichte einen wesentlich größeren Bereich als bei der Veränderung der Reichweite. Weiterhin führt eine Vergrößerung der Kopplungskonstanten zu einer Erhöhung sowohl der Dichte als auch der Bindungsenergie des Systems, was auch durchaus zu erwarten war. Eine Untersuchung des Systems für sehr große Kopplungskonstanten war mit dem verwendeten Lösungsverfahren

nicht möglich, da das Konvergenzverhalten sehr stark von der Größe g abhing. Jedoch ist in den erhaltenen Ergebnissen genügend Information über die g-Abhängigkeit enthalten, um Aussagen über den interessanten Bereich von g machen zu können.

Als letzter der drei Parameter wurde der Cut-off-Parameter der Wechselwirkung variiert. Hier fand man eine noch kritischere Abhängigkeit als von den beiden anderen. Die Bindungsenergie durchläuft schon bei nur geringer Änderungdes Cut-off-Parameters (3o %) mehrere Größenordnungen. Die Dichteänderung blieb dabei relativ gering, sieblieb bei noch weiterer Vergrößerung des Cut-off-Parameters sogar konstant. Auch das qualitative Verhalten ist hier anders als bei Bosonenmasse und Kopplungskonstanten. Während dort die relativen Änderungen in der Bindungsenergie immer kleiner wurden, werden sie hier immer größer. Dies deutet möglicherweise auf auftretende Divergenzen für $\Lambda \longrightarrow \infty$, also für den Fall einer punktförmigen Wechselwirkung hin.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß hier die Frage nach der Renormierbarkeit von Vielteilchensystemen zumindest im Lee-Modell in befriedigender Weise beantwortet werden konnte. Ebenso ließ sich ein Formalismus entwickeln, der weitgehend unabhängig von der speziellen Symmetrie des Lee-Modells ist und daher auch auf realistischere Modelle anwendbar ist. Ebenso ließe sich auch in realistischeren Modellen die Identifizierung der Selbstenergieanteile durch einen Teil der Korrelationsfunktionen durchführen. Es ist auch durchaus denkbar, daß auf diese Weise die Renormierung des Viel-

teilchensystems ohne Kenntnis der Einteilchenrenormierung näherungsweise durchgeführt werden kann. Selbstverständlich werden dann die entsprechenden Gleichungen wesentlich komplizierter, und die Frage nach der technischen Machbarkeit läßt sich hier nicht ohne weiteres beantworten.

Betrachtet man also abschließend noch einmal das Ziel dieser Arbeit, nämlich an einfachen Modellen zu lernen, wie man kompliziertere anfaßt, so läßt sich die ex pS-Theorie sicherlich in die Reihe der "Werkzeuge" eingliedern, mit deren Hilfe sich quantenfeldtheoretische Probleme in zufriedenstellender Weise behandeln lassen.

A N H A N G A

1. Bestimmung der Renormierungsfunktion Z_p

Nach Gleichung (II.18) ist die in allen expS-Gleichungen auftretende Funktion Z_α gegeben durch

$$Z_\alpha^{-2} = 1 - \sum_{\beta k} \frac{<\alpha|W|\beta\, k><\beta k|W^+|\alpha>}{(t_\alpha - t_\beta - \omega_k)^2} \tag{1}$$

Mit der in dieser Arbeit zugrunde gelegten Wechselwirkung der Form

$$<\alpha|W|\beta k> = -ig\,\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\,\frac{f(k)}{2m} <\chi_\alpha|\vec{\sigma}\cdot\vec{k}|\chi_\beta> \cdot \delta_{\vec{p}_\alpha,\,\vec{p}_\beta+\vec{k}} \tag{2}$$

ergibt sich

$$Z_\alpha^{-2} = 1 - g^2\,\frac{1}{8m^2}\,\frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{f^2(k)k^2}{\omega_k}\,(t_\alpha - t_\beta(\vec{p}_\alpha - \vec{k}) - \omega_k) \tag{3}$$

Der Obergang zum Unendlich-Teilchen-System liefert

$$Z_\alpha^{-2} = 1 - \frac{g^2}{32m^2\,\pi^2}\int_0^\infty dk\,\frac{f^2(k)\,k^4}{\omega_k}\int_{-1}^{1} dx\,(t_\alpha - t_\beta(\vec{p}_\alpha - \vec{k}) - \omega_k) \tag{4}$$

wobei x gegeben ist durch

$$x := \frac{\vec{p}_\alpha\cdot\vec{k}}{p_\alpha\,k} \tag{5}$$

Mit

$$t_{\alpha,\beta} = \frac{p^2_{\alpha,\beta}}{2m} \tag{6}$$

berechnet sich der Integrand von (4) zu

$$(t_\alpha - t_\beta(\vec{p}_\alpha - \vec{k}) - \omega_k)^2 = (\frac{p_\alpha k}{m} x - \frac{k^2}{2m} - \omega_k)^2$$

$$= \frac{p^2_\alpha k^2}{m^2} x^2 + x(-\frac{p_\alpha k^3}{m^2} - \frac{2p_\alpha k\omega_k}{m}) + \frac{k^2\omega_k}{m} + \frac{k^4}{4m^2} + \omega_k^2 \tag{7}$$

Es ist also bezüglich x ein Integral der Form

$$f(k) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c}$$

$$= \int_0^1 dx\,[(ax^2 + 2bx + c)^{-1} + (ax^2 - 2bx + c)^{-1}] \tag{8}$$

zu bestimmen.

Die Diskriminante b^2-ac verschwindet in beiden Fällen. Weiterhin ist im ersten Integranden $\frac{b}{a} < -1$ und im zweiten $\frac{b}{a} > 1$, wie leicht zu überprüfen ist, so daß nach /41/ gilt

$$f(k) = \frac{2a}{b^2 - a^2} = 2(\frac{k^4}{4m^2} + \omega_k^2 + \frac{k^2\omega_k}{m} - \frac{p^2k^2}{m^2})^{-1} \tag{9}$$

Hiermit läßt sich nun die Renormierungsfunktion $Z_\alpha =: Z_p$ angeben als

$$Z_\alpha^{-2} = 1 - \left(\frac{g}{4m\pi}\right)^2 \int_0^\infty dk \; \frac{f^2(k)\, k^4}{\omega_k \left[\left(\frac{k^2}{2m} + \omega_k\right)^2 - \frac{p^2 k^2}{m}\right]} \qquad (10)$$

Die weitere Berechnung dieses Integrals erfolgt numerisch und ist ohne Probleme durchführbar. Auch ist die Integration des Ausdruckes für große k unproblematisch, da der Integrand für $k \to \infty$ rasch verschindet.

2. Bestimmung des Selbstenergieanteils Δ_α

Nach Gleichung (II.48) ist der Ausdruck Δ_α gegeben durch

$$\Delta_\alpha = \sum_{\beta k} \frac{<\alpha|W|\beta k><\beta k|W^+|\alpha>}{t_\alpha - t_\beta - \omega_k} \tag{1}$$

In Analogie zu A.1 ergibt sich also

$$\Delta_\alpha =: \Delta_p = \frac{g^2}{32 m^2 \pi^2} \int_0^\infty dk \, \frac{f^2(k) k^4}{\omega_k} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\frac{pkx}{m} - \frac{k^2}{2m} - \omega_k} \tag{2}$$

Zu lösen ist also zunächst ein Problem der Form

$$f(k) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{ax - b} \tag{3}$$

Die Frage nach eventuellen Nullstellen läßt sich wie folgt beantworten:

Annahme: $b > a \quad \forall\, p, k$

Beweis: $\frac{k^2}{2m} + \omega_k > \frac{pk}{m}$

$$\rightarrow \omega_k > \frac{pk}{m} - \frac{k^2}{2m}$$

1. Fall: $k \geq 2p \Rightarrow b > a$ sofort!

2. Fall: $k < 2p$

$$\rightarrow k^2 + \mu^2 > \frac{p^2 k^2}{m^2} + \frac{k^4}{4m^2} - \frac{pk^3}{m^2}$$

$$\rightarrow -k^4 + 4pk^3 + 4(m^2 - p^2)k^2 + 4m^2\mu^2 > 0$$

Nun folgt aus dieser Ungleichung für $k = 0$

$$4m^2\mu^2 > 0$$

und für $k = 2p$

$$4m^2(4p^2 + \mu^2) > 0$$

An den Grenzen des Definitionsbereiches von x ist die Ungleichung also erfüllt. Zu prüfen ist nun noch, ob die Funktion

$$\hat{f}(k) = -k^4 + 4pk^3 + 4(m^2 - p^2)k^2 + 4m^2\mu^2$$

ein Minimum hat. Dies wäre eine notwendige Bedingung für einen Vorzeichenwechsel der Funktion $\hat{f}(k)$.
Man betrachte also die Ableitung $\hat{f}'(k)$:

$$\hat{f}'(k) = -4k^3 + 12pk^2 + 8(m^2 - p^2)k = 0$$

Die erste Nullstelle liegt also am Rand des Definitionsbereiches, nämlich bei $k_1 = 0$.
Die übrigen beiden Nullstellen

$$k_{2/3} = \frac{3}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + 2m^2}$$

liegen außerhalb des Definitionsbereiches von K. Das bedeutet, daß die untersuchte Funktion $\hat{f}(k)$ im Bereich von 0 bis 2p monoton steigt und folglich auch keine Nullstellen besitzt. Somit ist bewiesen

$$b > a \qquad \forall\, p,k \tag{3}$$

Mit dieser Kenntnis läßt sich das Integral nach /41/ angeben als

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{ax - b} = \frac{1}{a} \ln \frac{b - a}{b + a} \tag{4}$$

Der Ausdruck Δ_p läßt sich also nun angeben als

$$\Delta_p = \frac{g^2}{32\,m^2\,\pi^2}\;\frac{1}{p}\int dk\;\frac{f^2(k)\,k^3}{\omega_k}\;\ln\;\frac{\frac{k^2}{2m}+\omega_k-\frac{pk}{m}}{\frac{k^2}{2m}+\omega_k+\frac{pk}{m}} \qquad (5)$$

Die k-Integration wird wiederum numerisch ausgeführt. Da hier jedoch der Logarithmus für große k nur langsam verschwindet, es es sinnvoll, die Integration bei einem vorgegebenen k_o abzubrechen und einen Korekkturterm in folgender Weise einzuführen

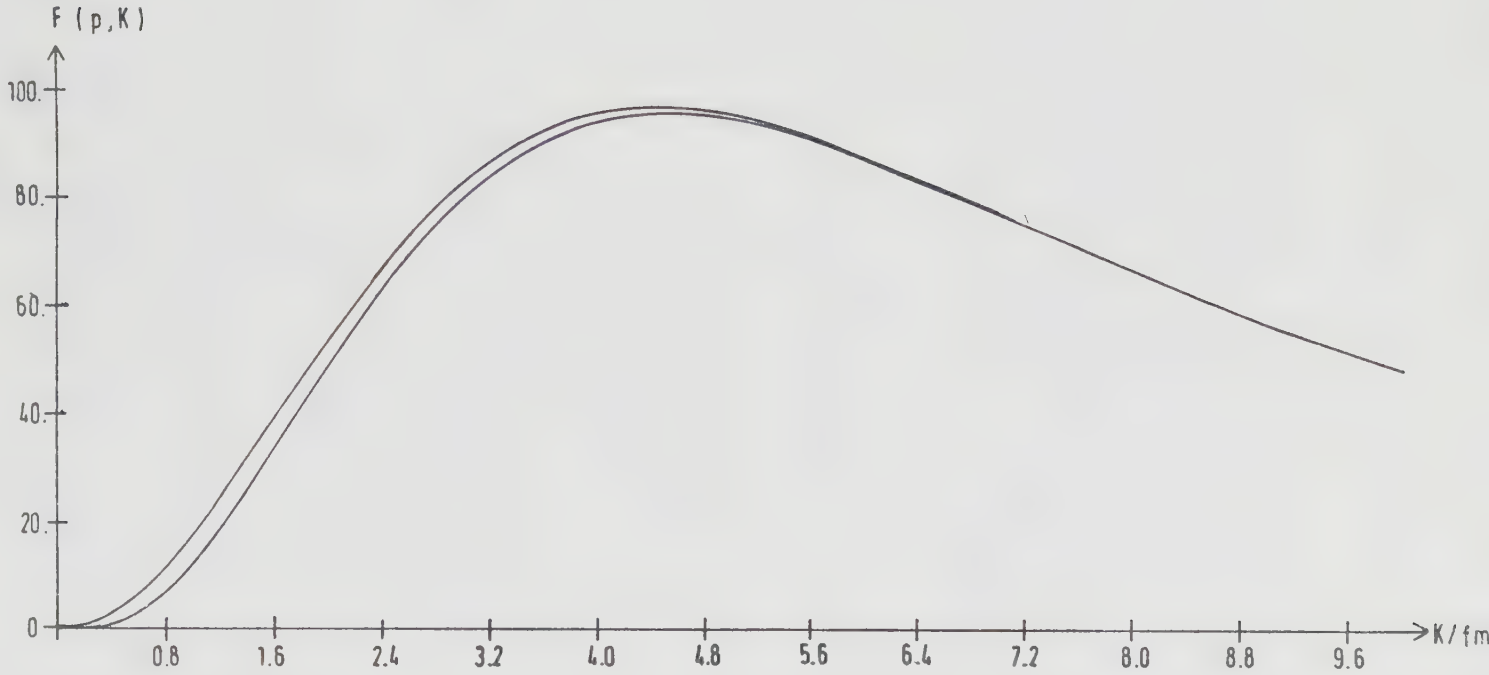
$$\Delta_p = \int_0^{k_0} dk\, f(k,p) + \Delta^{\infty} \qquad (6)$$

Wie sich durch eine Entwicklung des Integranden von (5) leicht zeigen läßt, ist der Korrekturterm in (6) für hinreichend große k ($k = 7\ fm^{-1}$) unabhängig von p und beträgt für einen Wert von $k_o = 12{,}5\ fm^{-1}$

$$\Delta^{\infty} = -132.9\ MeV. \qquad (7)$$

Diese Zahl ist zu dem Ausdruck (5) zu addieren. Die Genauigkeit der Entwicklung ist in Abb. 34 zu erkennen.

Abb. 34 : ZUM ASYMPTOTISCHEN VERHALTEN DER FUNKTION F (p , K)



A N H A N G B

1. Asymptotische Näherung für R

Die numerische Berechnung der Funktion, R(p, k, x) ist wegen der auftretenden Integrationen über das k-Intervall (0 , ∞) in dieser Form nicht möglich. Daher erscheint es angemessen, nach einer asymptotischen Näherung für R zu suchen. Das bedeutet, daß die auftretenden Integrationen über k zu ersetzen sind durch

$$\int_0^{\infty} dk\, k^2 \int_{-1}^{1} dx\, R(p,k,x) = \int_0^{k_{max}} dk\, k^2 \int_{-1}^{1} dx\, R(p,k,x) + F(p) \qquad (1)$$

Wobei F(p) eine Näherung für

$$F(p) = \int_{k_{max}}^{\infty} dk\, k^2 \int_{-1}^{1} dx\, R(p,k,x) \qquad (2)$$

ist. Da in der Gleichung für R (IV.14) die Selbstkopplung nur im Bereich $k \approx O(p)$ einen Beitrag liefert, bietet sich als asymptotische Lösung für R der folgende Ausdruck an:

$$R^{\infty}(p,k,x) = -\frac{g^2 Z_p^2}{32 m^2 \pi^2} \frac{f^2(k) k^2}{\omega_k} \left(\frac{pkx}{m} - \frac{k^2}{2m} - \omega_k - Z_p^2 \Delta_p \right)^{-1} \qquad (3)$$

In dieser Näherung läßt sich die x-Integration in (2) ausführen und man erhält somit:

$$F(p) = -\frac{g^2}{32 m^2 \pi^2} \frac{Z_p^2}{p} \int dk\, \frac{f^2(k) k^3}{\omega_k} \ln \frac{\frac{k^2}{2m} - \frac{pk}{m} + Z_p^2 \Delta_p + \omega_k}{\frac{k^2}{2m} + \frac{pk}{m} + Z_p^2 \Delta_p + \omega_k}$$

Dieser Ausdruck kann numerisch berechnet werden und ist gemäß (1) in den Ausdrücken für $e_1^{(2)}(p)$ und für die Bindungsenergie zu addieren.

2. Konvergenzverhalten der R-Gleichung

Bezeichnet man mit $R^{(n)}$ die Lösung der R-Gleichung nach der n-ten Iteration und trägt den Ausdruck $\ln/R^n - R^{n-1}/$ gegen n auf, so stellt man einen nahezu exakt linearen Zusammenhang fest (Abb. 35). Dies legt eine "Konvergenzbeschleunigung" der folgenden Form nahe:

Es sei

$$\Delta R^{(n+1,n)} = R^{(n+1)} - R^{(n)} \tag{1}$$

Es gilt nun

$$\ln|\Delta R^{(n+1,n)}| = a\,n + b \tag{2}$$

Sind nun die Ergebnisse der ersten drei Iterationen bekannt, so lassen sich die Koeffizienten a und b aus (2) bestimmen zu

$$a = \ln\left(-\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}}\right) \tag{3}$$

$$b = \ln\frac{(\Delta R^{(2,1)})^2}{|\Delta R^{(3,2)}|} \tag{4}$$

Hierbei ist zu beachten, daß $\Delta R^{(n+1,n)}$ und $\Delta R^{(n,n-1)}$ immer verschiedene Vorzeichen haben.

Damit folgt aus (2)

$$\ln|\Delta R^{(n+1,n)}| = \ln\left(-\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}}\right)^n + \ln\frac{(\Delta R^{(2,1)})^2}{|\Delta R^{(3,2)}|} \tag{5}$$

oder

$$|\Delta R^{(n+1,n)}| = |\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}}|^{n-2} \cdot |\Delta R^{(3,2)}| \qquad (6)$$

Zur Vorzeichenbestimmung:

Sei $\Delta R^{(n+1,n)} < 0$ für n ungerade

$\Delta R^{(n+1,n)} > 0$ für n gerade

d.h. $\Delta R^{(3,2)} > 0$ und $\Delta R^{(2,1)} < 0$.

Für ungerades n ist also

$(\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}})^{n-2} < 0$ und somit $\Delta R^{(n+1,n)} < 0$.

Für gerades n ist $(\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}})^{n-2} > 0$ und somit

$\Delta R^{(n+1,n)} > 0$.

Sei nun

$\Delta R^{(n+1,n)} < 0$ für n gerade

$\Delta R^{(n+1,n)} > 0$ für n ungerade

d.h. $\Delta R^{(3,2)} < 0$, $\Delta R^{(2,1)} > 0$.

Also folgt für

n ungerade $(\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}})^{n-2} < 0 \rightarrow \Delta R^{(n+1,n)} > 0$

n gerade: $(\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}})^{n-2} > 0 \rightarrow \Delta R^{(n+1,n)} < 0$

Das bedeutet, in Gleichung (6) können die Betragstriche wegfallen und es bleibt:

$$\Delta R^{(n+1,n)} = \left(\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}}\right)^{n-2} \Delta R^{(3,2)} \tag{7}$$

Mit dieser Kenntnis läßt sich also nach drei erfolgten Iterationen auf $n \longrightarrow \infty$ extrapolieren:

$$\begin{aligned} R &= R^{(3)} + \sum_{n=3}^{\infty} \Delta R^{(n+1,n)} \\ &= R^{(3)} + \Delta R^{(3,2)} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}}\right)^{n-2} \\ &= R^{(3)} + \Delta R^{(3,2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta R^{(3,2)}}{\Delta R^{(2,1)}}\right)^{n} \end{aligned} \tag{8}$$

Da der Betrag des Quotienten in (8) immer kleiner als eins ist, konvergiert die alternierende geometrische Reihe und es folgt

$$R = R^{(3)} + \frac{(\Delta R^{(3,2)})^2}{\Delta R^{(3,2)} - \Delta R^{(2,1)}} \tag{9}$$

Diese Extrapolation läßt sich nun nach jeder dritten Iteration ausführen. Dies führt zu einer Einsparung von ca. 6o % der Gesamtrechenzeit.

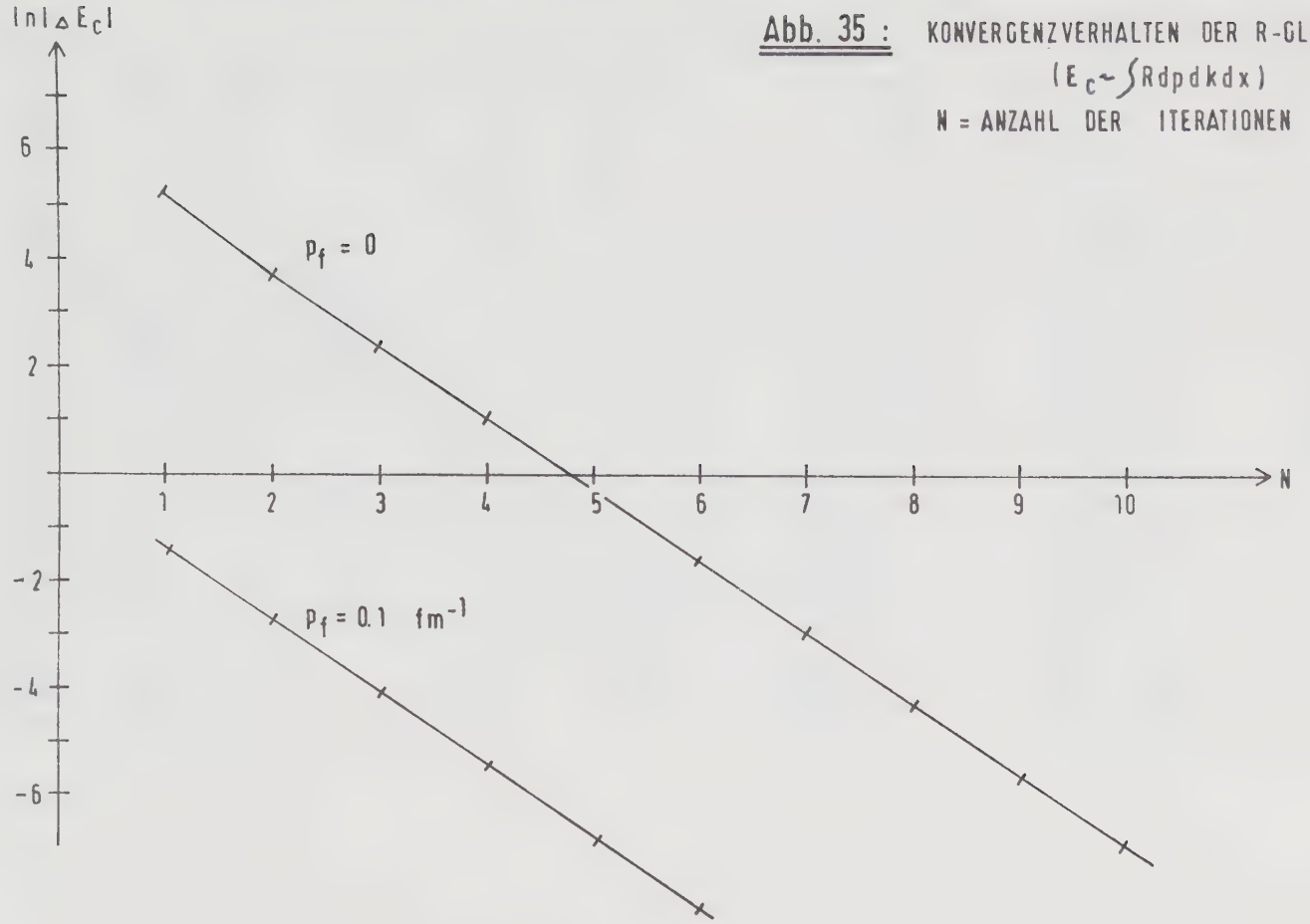


Abb. 35 : KONVERGENZVERHALTEN DER R-GLEICHUNG
($E_c \sim \int R dp dk dx$)
N = ANZAHL DER ITERATIONEN

3. Approximative Bestimmung des S_{11}-Terms

Die in Kapitel IV.3 bereits angesprochene Approximation für Gleichungen (IV.33) und (IV.34) bedeutet, daß alle auftretenden Integrale angenähert werden durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \rightarrow (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{1}$$

Dann erhält man ja nach Größe des Mesonenimpulses k folgende Ausdrücke für δ_{11}:

(i) für $k \leq p_f$

$$\delta_{11} = -\frac{g^2}{64\,m^2\pi^2}\;\frac{f^2(k)\,k^2}{\omega_k}\,Z^2_{p_f+\frac{1}{2}k}\,(p_f+\tfrac{1}{2}k)(p_f-\tfrac{1}{4}k)\,k \tag{2}$$
$$\cdot\left\{h^{(1)}(p,k,x)\left[-\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}k\,(p_f-\tfrac{1}{2}k)(p_f+\tfrac{1}{4}k)\,g^{(1)}(k)R(p_m,k,x_m)\right]\right\}^{-1}$$

Hierbei sind die Größen p_m und x_m gegeben durch

$$p_m = p_f - \tfrac{1}{2}k \tag{3}$$

und

$$x_m = \frac{3(\frac{3}{4}k-p_f)}{4\,(p_f-\frac{1}{2}k)} \tag{4}$$

Die Funktionen $h^{(1)}(p,k,x)$ und $g^{(1)}(k)$ bestimmen sich zu

$$h(p,k,x) := e_2\,(p,k,x,p^m_\pi,x^m_\pi) \tag{5}$$
$$= \left(\frac{p\,k\,x}{m} - Z^2_p\,\Delta_p\right) - \left[\frac{3k}{4m}\,(p_f+\tfrac{3}{4}k) - Z^2_{p_f+\frac{1}{2}k}\,\Delta_{p_f+\frac{1}{2}k}\right]$$
$$- X(p)$$

mit

$$X(p) := 2 \int_0^{\infty} dk' k'^2 \int_{-1}^{1} dx' \, R(p,k',x') \tag{6}$$

und

$$\begin{aligned}\left[g^{(1)}(k)\right]^{-1} &:= e_2(p_m, k, x_m, p_{\pi}^m, x_{\pi}^m) \\ &= \frac{(\frac{3}{4}k)^2}{m} + Z_{p_f - \frac{1}{2}k}^2 \Delta p_f - \tfrac{1}{2}k - Z_{p_f + \frac{1}{2}k}^2 \Delta p_f + \tfrac{1}{2}k \\ &\quad - X(p_f - \tfrac{1}{2}k)\end{aligned} \tag{7}$$

Hiermit ist der Ausdruck δ_{11} für $k \leq p_f$ bestimmt.

(ii) für $p_f < k < 2p_f$

$$\begin{aligned}\delta_{11} = &- \frac{g^2}{64 m^2 \pi^2} \frac{f^2(k) k^2}{\omega_k} Z_{p_f + \frac{1}{2}k}^2 (p_f + \tfrac{1}{2}k)(p_f - \tfrac{1}{4}k) k \\ &\cdot \left\{ h^{(1)}(p,k,x) \left[\tfrac{3}{2} + f^{(1)}(k, p_m^{(1)}) + f^{(2)}(k, p_m^{(2)}) \right] \right\}^{-1}\end{aligned} \tag{8}$$

Hierbei ist

$$p_m^{(1)} = \frac{1}{2}(k - p_f) \tag{9}$$

und

$$p_m^{(2)} = \frac{1}{2} k$$

Die Funktion $h^{(1)}(p, k, x)$ ist durch Gleichung (5) bestimmt. Die Ausdrücke für die Funktionen $f^{(1)}(k, p_m^{(1)})$ und $f^{(2)}(k, p_m^{(2)})$ sind wie folgt definiert:

$$f^{(1)}(k, p_m) := \frac{1}{2}(k - p_f)^3 \; g^{(2)}(k) R(p_m^{(1)}, k, 0) \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned}[g^{(2)}(k)]^{-1} &:= e_2(p_m^{(1)}, k, 0, p_{\pi}^m, x_{\pi}^m) \\ &= Z^2_{p_f + \frac{1}{2}k} \Delta_{p_f + \frac{1}{2}k} - Z^2_{\frac{1}{2}(k-p_f)} \Delta_{\frac{1}{2}(k-p_f)} - \frac{3k}{4m}(p_f + \frac{3}{4}k) \\ &\quad - X(\tfrac{1}{2}(k - p_f))\end{aligned} \tag{11}$$

$$f^{(2)}(k, p_m) = \frac{1}{2}(p_f - \frac{1}{2}k)(\frac{9}{4}k^2 - p_f^2) \, g^{(3)}(k) R(p_m^{(2)}, k, x_m^{(2)}) \tag{12}$$

mit

$$\begin{aligned}[g^{(3)}(k)]^{-1} &:= e_2(p_m^{(2)}, k, x_m^{(2)}, p_{\pi}^m, x_{\pi}^m) \\ &= -\frac{1}{4m}(2k + p_f)(k + p_f) - Z^2_{\frac{1}{2}k} \Delta_{\frac{1}{2}k} + Z^2_{p_f + \frac{1}{2}k} \Delta_{p_f + \frac{1}{2}k} \\ &\quad - X(\tfrac{1}{2}k)\end{aligned} \tag{13}$$

und

$$x_m^{(2)} = \frac{\frac{1}{4}k^2 - p_f^2}{2k^2} \tag{14}$$

Letztlich bleibt nun noch der dritte mögliche Fall für δ_{11} anzugeben:

(iii) für $k > 2p_f$

$$\delta_{11} = -\frac{g^2}{32m^2\pi^2} \frac{f^2(k)\,k^2}{\omega_k} p_f^3 \; Z_k^2 \tag{15}$$

mit $\left\{ h^{(2)}(p,k,x)\left[\frac{3}{2} + \frac{p_f^3}{2} g^{(4)}(k) R\left(\frac{p_f}{2}, k, 0\right)\right]\right\}^{-1}$

$$h^{(2)}(p,k,x) = \left(\frac{pkx}{m} - Z_p^2 \; \Delta p\right) - \left(\frac{k^2 - \frac{1}{4}p_f^2}{m} - Z_k^2 \; \Delta_k\right) - X(p) \tag{16}$$

und

$$\left[g^{(4)}(k)\right]^{-1} = -\frac{Z_{\frac{p_f}{2}}^2 \; \Delta_{\frac{p_f}{2}}}{2} + Z_k^2 \; \Delta_k - \frac{k^2 - \frac{1}{4}p_f^2}{m} - X\left(\frac{p_f}{2}\right) \tag{17}$$

Hiermit ist der Ausdruck für δ_{11} näherungsweise bestimmt und in dieser Form auch berechenbar.

LITERATUR:

/1/ H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48

/2/ T. Hamada, I.D. Johnston, Nucl. Phys. 34 (1962) 382

/3/ K.E. Lassila et al., Phys. Rev. 126 (1962) 881

/4/ R.V. Reid, Ann. of Phys. 5o (1968) 411

/5/ M.I. Haftel, F. Tabakin, Nucl. Phys. A158 (197o) 1

/6/ K. Erkelenz, Phys. Rep. 13C (1974) 191

/7/ K. Hohlinde, R. Machleidt, Nucl. Phys. A247 (1975) 495

/8/ K. Hohlinde, R. Machleidt, Nucl. Phys. A256 (1976) 479

/9/ R.P. Feynman et al., Quantenelektrodynamik, BI-HTB 4o1/4o1a (1969)

/10/ L. Willets, Greens functions method für the relativistic field theory many body problem, in "Mesons in Nuclei", (edited by M. Rho and D. Wilkinson), Vol. III, North-Holland (1979)

/11/ A.M. Green, Rep. Prog. Phys. 39 (1976) 11o9

/12/ D. Schütte, Nucl. Phys. A 221 (1974) 45o

/13/ K. Kotthoff et al., Nucl. Phys. A242 (1975) 429

/14/ K. Kotthoff et al., Nucl. Phys. A 264 (1976) 484

/15/ T.D. Lee, Phys. Rev. 95 (1954) 1329

/16/ C. Schmit, J.P. Maillet, Nucl. Phys. A 312 (1978) 236

/17/ H.R. Petry, M. Sawicki, Z. Naturforsch. 33a (1978) 1

/18/ S.S. Schweber, An introduction into relativistic quantum fiel theory, chapter 12, Row. Peterson & Company, Evanstone (1961)

/19/ J.M. Lévy-Leblond, Commun. Math. Phys. 4 (1967) 157

/2o/ R. Schrader, Commun. Math. Phys. 1o (1968) 155

/21/ D. Schütte, J. da Providencia, Nucl. Phys. A338 (198o) 463

/22/ F. Coester Nucl. Phys. 7 (1958) 421

/23/ F. Coester, H. Kümmel, Nucl. Phys. 17 (196o) 477

/24/ F. Coester, Lectures in theoretical physics, Vol. II (edited by K.H. Mahanthappa, Gordon & Breach, New York, 1969)

/25/ H. Kümmel, Nucl. Phys. A176 (1971) 2o5

/26/ H. Kümmel, K.H. Lührmann, Nucl. Phys. A191 (1972) 515

/27/ H. Kümmel, K.H. Lührmann, J.G. Zabolitzky, Phys. Rep. 36C (1978) 1

/28/ S. Sendler, Diplomarbeit, Bochum (1978)

/29/ E.M. Henley, W. Thirring, Elementary quantum field theory, McGraw-Hill Bock Company, Inc. (1962)

/3o/ W. Pauli, G. Källen, Kgl. Danske, Vid. Selk, Mat.-Fys. Medd. 3o (1955) 3

/31/ W. Heisenberg, Introduction into the field theory of elementary particles, Interscience (1966)

/32/ N. Fukada, K. Sawada, M. Taketani, Prog. Theor. Phys. 12 (1954) 156

/33/ S. Okubo, Prog. Theor. Phys. 12 (1954) 6o3

/34/ K.H. Lührmann, R.F. Bishop, Phys. Rev. B17 (1978) 3757

/35/ J.G. Zabolitzky, Phys. Rev. Lett. 4o (1978) 1239

/36/ J.G. Zabolitzky, Nucl. Phys. A328 (1979) 5o7

/37/ R.P. Kanwal, Linear Integral Equations, Academic Press, New York (1971)

/38/ R. Dedekind, Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate, Festschrift zur Feier des 15o-jährigen Bestehens der Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen, Berlin (19o1)

/39/ Ph. L. Seidel, Münch. Akad. Abhandl. (1874) 81

/4o/ G.E. Brown, M. Rho, Phys. Lett. 82B (1979) 77

/41/ W. Gröbner, N. Hofreiter, Bestimmte Integrale, Springer-Verlag (1966)

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. Kümmel für die Oberlassung des Themas sowie für das rege Interesse an dieser Arbeit. Weiterhin danke ich Herrn M. Wimmer für die ständige Bereitschaft zu Diskussionen.

LEBENSLAUF

1953:	Am 19.1o. in Essen geboren
196o-1964:	Besuch der Maria-Kunigunda-Schule in Essen
1964-1973:	Besuch des neusprachlichen Leibniz-Gymnasiums in Essen
1973:	Im Mai Reifeprüfung am Leibniz-Gymnasium
1973-1979:	Studium der Physik an der Ruhr-Universität Bochum
1979:	Im Juli Diplom-Hauptprüfung an der Ruhr-Universität Bochum
Seit 1979:	Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft bzw. wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für theoretische Physik der Ruhr-Universität Bochum

Druck und Verarbeitung: copy shop, darmstadt, tel. 21353